„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2017

FINALE

KLASSE 11

J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:

PROF. DR. FREUND TAMÁS

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:

NAGY-BALÓ ANDRÁS, *Mathematiklehrer*

ÜBERSETZER DER AUFGABEN:

ATTILA FURDEK, *Mathematiklehrer*

LEKTOR DER ÜBERSETZUNG:

MATTHIAS BENKESER, *Mathematiklehrer*

KOORDINATORIN:

RITA FESER, *Mathematiklehrerin*

BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:

GEORG PROBST, *Informatiker*

TASSY GERGELY, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-5 auf dem Antwortblatt mit X.
Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Wie viele Zahlenpaare sind Lösungen für das folgende Gleichungssystem?

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}=2 \\ y+\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

Bemerkung: x und y sind reelle Zahlen.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *6*

2. Alle Eckpunkte des Parallelogramms *ABCD* liegen auf derselben Seite einer Ebene *E*. Der Abstand von *A* zu *E* beträgt 4 cm, der Abstand von *C* zu *E* 8 cm. Das Viereck *A'B'C'D'* ist die senkrechte Projektion von *ABCD* auf *E*. Der Flächeninhalt des Vierecks *A'B'C'D'* beträgt 10 cm^2. **Die Frage**: Wie viele cm^3 kann das Volumen des Körpers *ABCDA'B'C'D'* betragen?

(A) *40* **(B)** *50* **(C)** *60* **(D)** *70* **(E)** *80*

3. Als Aaron mit einer gültigen Fahrkarte in seinen Waggon einsteigt, stellt er fest, dass alle 78 Plätze belegt sind – obwohl er eine Platzreservierung hat. Es war nämlich Folgendes passiert: Daniel stieg ohne Fahrkarte in den Waggon ein. Die anderen 77 Fahrgäste – darunter Emil – hatten sich zwar jeder einen Platz reserviert, aber sie saßen nicht unbedingt auf ihren reservierten Plätzen. Aaron geht nun zu seinem reservierten Platz und bittet den Fahrgast, der dort sitzt, aufzustehen. Dieser geht wiederum zu seinem reservierten Platz und bittet den Fahrgast, der dort sitzt, aufzustehen. Das Ganze setzt sich so lange fort, bis bemerkt wird, dass Daniel keine Fahrkarte hat. **Die Frage**: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Emil nicht aufzustehen braucht?

(A) *mehr als* $\frac{1}{4}$ **(B)** *mehr als* $\frac{1}{3}$ **(C)** *nicht mehr als* $\frac{1}{2}$

(D) *mehr als* $\frac{1}{2}$ **(E)** *mehr als* $\frac{2}{3}$

4. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h, die einen 36° Winkel einschließen. Ein Grashüpfer springt von der Gerade g auf die Gerade h, von h auf g zurück und so weiter. Alle seine Sprünge haben dieselbe Länge. **Die Frage**: Wie viele verschiedene Punkte der zwei Geraden kann der Grashüpfer auf diese Art erreichen?
Bemerkung: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

(A) *10* **(B)** *12* **(C)** *18* **(D)** *36* **(E)** *72*

5. Die Kreise k_1 und k_2 haben beide den Radius 1 dm und berühren sich im Punkt *B*. *t* ist eine gemeinsame Tangente der zwei Kreise, die nicht durch den Punkt *B* geht. Wir definieren nun weitere, neue Kreise: k_3 sei jener Kreis, der k_1, k_2 und *t* berührt. k_4 sei jener Kreis, der k_1, k_3 und *t* berührt ($k_4 \neq k_2$). k_5 sei jener Kreis, der k_1, k_4 und *t* berührt ($k_5 \neq k_3$). Dieses Verfahren wird fortgesetzt. **Die Frage**: Welchen Radius in dm hat der Kreis k_{2021}?

(A) $\frac{1}{2021^2}$ **(B)** $\frac{1}{2020^2}$ **(C)** $\frac{1}{2022}$ **(D)** $\frac{1}{2021}$ **(E)** $\frac{1}{2020}$