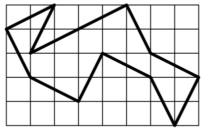
11. Ein Soldat soll ein Gelände, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, auf Minen untersuchen. Sein Minensuchgerät kann Minen in einem Radius von 100 m erkennen. Die Höhe des Dreiecks beträgt 200 m. Der Soldat fängt bei einem Eckpunkt des Dreiecks mit der Suche an. **Die Frage**: Wie viele m lang kann ein Weg des Soldaten sein, der ausreicht, um das ganze Gelände (einschließlich der Begrenzungslinien) auf Minen zu untersuchen?

(A) *110* **(B)** *160* **(C)** *210* **(D)** *220* **(E)** *260*

12. Man betrachtet Punkte im Raum, die folgende Bedingungen erfüllen:
1. Nicht alle Punkte liegen in derselben Ebene *und* 2. Für zwei beliebige Punkte A, B lassen sich zwei andere Punkte C, D finden, so dass die Geraden AB und CD parallel zueinander verlaufen (aber nicht identisch sind).
Die Frage: Wie viele solche Punkte kann es insgesamt geben?

(A) *10* **(B)** *14* **(C)** *22* **(D)** *27* **(E)** *30*

13. Diana zeichnet auf einem 5×8 großen Gitternetz einen Rundweg ein. Der Rundweg lässt sich in Strecken zerlegen, die allesamt Diagonalen eines 1×2 Rechtecks sind (siehe Figur). Ihr Rundweg besteht aus 12 solchen Diagonalen. Diana möchte nun noch andere Rundwege zeichnen, die aus Diagonalen von 1×2 Rechtecken bestehen.

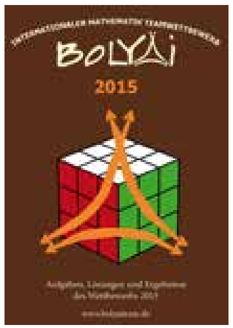


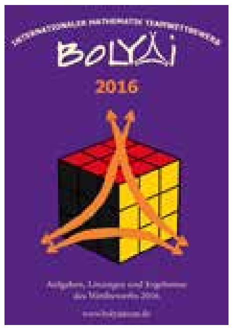
Die Frage: Aus wie vielen Diagonalen eines 1×2 Rechtecks kann ein anderer Rundweg insgesamt bestehen?
<u>Lösungshinweis</u>: Kein Punkt darf mehr als einmal passiert werden.

(A) *14* **(B)** *17* **(C)** *18* **(D)** *21* **(E)** *24*

Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!

14. Beweise, dass $\log_5 10$ eine irrationale Zahl ist.





Die Aufgaben, deren Lösungen und die Ergebnisse des Wettbewerbs von den Schuljahren 2014/2015 und 2015/2016 sind als Buch erschienen. Alle Lösungen wurden schülerfreundlich und ausführlich gestaltet. Das Buch kann unter <u>www.bolyaiteam.de</u> bestellt werden.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen."

Prof. Dr. Freund Tamás
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie, Förderer des Wettbewerbs

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

C. F. GAUSS

2017

1. RUNDE

KLASSE 12

J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:
PROF. DR. FREUND TAMÁS
Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften, Vizepräsident der Ungarischen Akademie

BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:
NAGY-BALÓ ANDRÁS, *Mathematiklehrer*

ÜBERSETZER DER AUFGABEN:
ATTILA FURDEK, *Mathematiklehrer*
VÁRADY FERENC, *Hochschulassistent*

LEKTOREN DER ÜBERSETZUNG:
MATTHIAS BENKESER, *Mathematiklehrer*
MICHAEL KNOTE, *Mathematiklehrer*

KOORDINATORIN:
RITA FESER, *Mathematiklehrerin*

BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:
GEORG PROBST, *Informatiker*
TASSY GERGELY, *Mathematiklehrer*

www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Ein Seil wurde zunächst einmal in der Mitte umgefaltet, danach noch ein zweites und ein drittes Mal mittig zusammengefaltet. Anschließend wurde das dreifach umgefaltete Seil durchgeschnitten, aber nicht an den Stellen, wo es gefaltet wurde. Unter den entstandenen Seilstücken gab es welche (eins oder mehr) mit der Länge 4 cm und auch welche (eins oder mehr) mit der Länge 9 cm. **Die Frage**: Wie lang konnte das ursprüngliche Seil gewesen sein?
Lösungshinweis*:* 4 cm und 9 cm waren nicht die einzigen Längen, die vorkamen.

(A) *52 cm* **(B)** *56 cm* **(C)** *68 cm* **(D)** *84 cm* **(E)** *88 cm*

2. Gegeben sind die ganzen Zahlen a, b, c, d (die nicht alle verschieden sein müssen). Man berechnet die Produkte ab, bc, cd, ad, bd, ac. Wie viele unterschiedliche Werte können auf diese Weise insgesamt entstehen?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

3. Zwei Dreiecke stimmen in allen drei Winkeln und in zwei Seiten überein. Dann gilt:

(A) *Die zwei Dreiecke sind in jedem Fall nicht kongruent.*
(B) *Die zwei Dreiecke sind in jedem Fall kongruent.*
(C) *Die zwei Dreiecke könnten kongruent sein.*
(D) *Die zwei Dreiecke könnten nicht kongruent sein.*
(E) *Aus den vorherigen Aussagen sind genau 2 richtig.*

4. Gesucht werden Beispiele von zwölf (nicht unbedingt alle verschiedenen) reellen Zahlen, deren Produkt nicht Null ergibt. Außerdem soll gelten: Wenn alle zwölf Zahlen um jeweils 1 verringert werden, ändert sich das Produkt nicht. Wie viele solche Beispiele gibt es insgesamt?
Lösungshinweis: Zwei Beispiele gelten dann als verschieden, wenn es (mindestens) eine Zahl gibt, die in den zwei Beispielen unterschiedlich oft vorkommt.

(A) *Genau eins.* **(B)** *Höchstens zwei.* **(C)** *Mindestens drei.*
(D) *Mindestens vier.* **(E)** *Keins, da es keine solchen Beispiele gibt.*

5. Für die natürlichen Zahlen a, b und c gilt: $\text{kgV}(a, b) = 60$ und $\text{kgV}(a, c) = 270$. Dabei steht $\text{kgV}(a, b)$ für das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. Welche Werte kann $\text{kgV}(b, c)$ annehmen?

(A) *72* **(B)** *108* **(C)** *270* **(D)** *360* **(E)** *540*

6. Zunächst bilden wir eine erste Zahlenreihe, indem wir die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in einer beliebigen Reihenfolge aufschreiben. Nun bilden wir eine zweite Zahlenreihe von ebenfalls sechs Zahlen nach folgender Regel: Die Summe der ersten k Zahlen aus der ersten Zahlenreihe ergibt die k-te Zahl der zweiten Zahlenreihe, wobei k Werte zwischen 1 und 6 annimmt (Beispiel: Die Summe der ersten drei Zahlen aus der ersten Zahlenreihe ergibt die dritte Zahl der zweiten Zahlenreihe). **Die Frage**: Wie viele Primzahlen könnten sich insgesamt in der zweiten Zahlenreihe befinden?
Lösungshinweis: 1 ist keine Primzahl.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

7. In einer Gruppe von fünf Personen kennen sich einige und einige nicht. Welche von den unten aufgeführten Zahlen können die Anzahlen der Bekanntschaften dieser fünf Personen wiedergeben (Beispiel: *2, 3, 2, 1, 0* bedeutet: Person 1 kennt genau 2, Person 2 kennt genau 3, Person 3 kennt genau 2, Person 4 kennt genau 1 und Person 5 kennt 0 Personen).
Lösungshinweise: Bekanntschaften sind immer gegenseitig. Man kennt sich zwar selbst, dies wird aber nicht mitgezählt.

(A) *4, 4, 4, 4, 3* **(B)** *2, 3, 2, 1, 0* **(C)** *3, 3, 3, 3, 3*
(D) *2, 3, 2, 3, 1* **(E)** *4, 1, 2, 2, 2*

8. Ein 8×8 Schachbrett soll so in n Rechtecke zerlegt werden, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: 1. Kein Feld darf durchgeschnitten werden. 2. Jedes Rechteck enthält genauso viele weiße wie schwarze Felder. 3. Es gibt keine zwei Rechtecke mit derselben Anzahl von weißen Feldern. **Die Frage**: Für welche der aufgeführten Werte von n ist dies möglich?
Lösungshinweis: Auf dem Schachbrett wechseln sich die weißen und die schwarzen Felder ab. Das Eck unten rechts ist weiß.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

9. Eine Zahlenreihe von reellen Zahlen hat folgende Eigenschaften: 1. Die Summe von 7 beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen ist negativ *und* 2. Die Summe von 11 beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen ist positiv. Wie viele Zahlen kann eine solche Zahlenreihe insgesamt enthalten?
Lösungshinweis: Die Frage bezieht sich nur auf die aufgeführten Zahlen.

(A) *13* **(B)** *16* **(C)** *18* **(D)** *2017* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

10. Alle Eckpunkte eines Vielecks sind Gitternetzpunkte *und* alle Seiten des Vielecks sind gleich lang. Wie viele Seiten kann ein solches Vieleck insgesamt haben?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *6* **(D)** *8* **(E)** *12*

Achtung! Aufgaben 11-14 folgen auf der nächsten Seite.