Lösungen – Klasse 5

1. Herr Meier kaufte ein Pferd für 3000 € und verkaufte es für 5000 €. Dann kaufte er noch ein anderes Pferd für 6000 € und verkaufte es für 9000 €. Wie viel hat Herr Meier insgesamt verdient?

(A) *2000 €* **(B)** *3000 €* **(C)** *4000 €* **(D)** *5000 €* **(E)** *9000 €*

Lösung: Am ersten Pferd verdiente Herr Meier 2000 € (5000 € – 3000 €), am zweitem Pferd 3000 € (9000 €– 6000 €). Insgesamt verdiente er **5000** € (2000 € + 3000 €).

Alternativlösung: Die Gesamtausgaben von Herrn Meier betrugen 9000 € (3000 € + 6000 €), seine Gesamteinnahmen 14000 € (5000 € + 9000 €). Somit hat er unter dem Strich **5000** € (14000 € – 9000 €) verdient.

Die richtige(n) Antwort(en): D

2. Jemand hat einige aufeinanderfolgende ganze Zahlen multipliziert und als Ergebnis 120 erhalten. Wie viele Zahlen konnte er multipliziert haben?

(A) *2* **(B)** *3* **(C)** *4* **(D)** *5* **(E)** *6*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **3**, **4** und **5** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein Beispiel an. $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 2 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: $10 \cdot 11 = 110$ ist noch zu klein (110 < 120), aber $11 \cdot 12 = 132$ ist bereits zu groß (132 > 120).
In **Teil 3** zeigen wir, dass 6 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung:
Wenn unter den sechs Zahlen die 0 nicht vorkommt, dann ist bereits das kleinste Produkt der 6 positiven Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ größer als 120.
Wenn unter den sechs Zahlen die 0 vorkommt, dann ist das Produkt der sechs Zahlen 0 und nicht 120.
<u>Beachte</u>: Wenn alle sechs Zahlen negativ wären, dann wäre das Produkt mindestens 720, denn $(-6) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) = 720$.
In keinem dieser Fälle wäre das Ergebnis 120.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

3. Die Summe dreier verschiedener positiven ganzen Zahlen (alle nicht Null) ist 10. Welche kann die größte dieser drei Zahlen sein?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **5**, **6** und **7** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. **5** + 4 + 1 = 10, **6** + 3 + 1 = 10, **7** + 2 + 1 = 10.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 8 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: Die Summe der anderen zwei Zahlen müsste 2 sein (10 – 8). Aber 2 = 1 + 1 geht <u>nicht</u>, weil die Zahlen unterschiedlich sein müssen. 2 = 2 + 0 geht ebenfalls <u>nicht</u>, weil man die 0 <u>nicht</u> verwenden darf.
In **Teil 3** zeigen wir, dass 9 <u>keine</u> Lösung ist. Begründung: Die Summe der

anderen zwei Zahlen müsste 1 sein (10 – 9). Aber 1 = 1 + 0 geht nicht, weil man die 0 nicht verwenden darf.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

4. Anna, Bea, Carla, Diana und Elisabeth schauen sich in einem Schaufenster rote, grüne, gelbe und weiße Blusen an. Dabei stellen sie fest:
Anna: Es gibt genau 5 Blusen, die entweder rot oder grün sind.
Bea: Es gibt genau 8 Blusen, die grün oder gelb sind.
Carla: Von den grünen Blusen gibt es am wenigsten.
Diana: Von den weißen Blusen gibt es am meisten.
Elisabeth: Es gibt insgesamt 20 Blusen im Schaufenster.
Insgesamt wie viele weiße Blusen können höchstens im Schaufenster sein?
Bemerkung: Alle Blusen sind einfarbig.

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass höchstens 2 grüne Blusen zu sehen sind. Begründung: Wenn es mindestens 3 grüne Blusen wären, dann gäbe es höchstens 2 rote (Anna). Dies geht aber nicht wegen der Feststellung von Carla.
In **Teil 2** untersuchen wir zwei Möglichkeiten:
1. Möglichkeit: Es gibt genau 1 grüne Bluse. Somit gibt es 4 rote (Anna) und 7 gelbe Blusen (Bea). Daraus folgt: Es gibt insgesamt $20-(1+4+7)=8$ weiße Blusen. 8 ist tatsächlich die größte der vier Zahlen 1, 4, 7 und 8.
2. Möglichkeit: Es gibt genau 2 grüne Blusen. Somit gibt es 3 rote (Anna) und 6 gelbe Blusen (Bea). Daraus folg: Es gibt insgesamt $20-(2+3+6)=9$ weiße Blusen. 9 ist tatsächlich die größte der vier Zahlen 2, 3, 6 und 9.
Im Schaufenster waren also 8 oder 9 weiße Blusen, also höchstens **9**.

Die richtige(n) Antwort(en): E

5. In einem zoologischen Garten leben viele Affen. Ein Affe ist an einem Tag nur dann glücklich, wenn er an dem Tag drei unterschiedliche Obstsorten gegessen hat. Heute gibt es 20 Äpfel, 30 Aprikosen, 40 Orangen und 50 Bananen. Wie viele Affen können heute insgesamt glücklich werden?

(A) *40* **(B)** *41* **(C)** *43* **(D)** *45* **(E)** *46*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **45** eine Lösung ist. Zum Beispiel dann, wenn 5 Affen je einen Apfel, eine Aprikose und eine Banane bekommen, 15 Affen je einen Apfel, eine Orange und eine Banane erhalten und 25 Affen je eine Aprikose, eine Orange und eine Banane erhalten. Dann gibt es 45 (5 + 15 + 25) glückliche Affen. Es wurden 20 Äpfel, 30 Aprikosen, 40 Orangen und 45 Bananen verbraucht.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **43** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen zweier Affen ein anderer Affe erhält.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **41** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen,

wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen von vier Affen ein anderer Affe erhält.

In **Teil 4** zeigen wir, dass **40** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen von fünf Affen ein anderer Affe erhält.

In **Teil 5** zeigen wir, dass 46 keine Lösung ist.

Im *1. Schritt* zeigen wir, dass 47 keine Lösung ist. Begründung: Damit 47 Affen glücklich werden, bräuchte man 141 Oststücke ($47 \cdot 3$). Heute gibt es aber nur 140 Obststücke ($20+30+40+50$). Da 140 kleiner als 141 ist, ist 47 keine Lösung.

1. Folgerung: Es kommen also nicht mehr als 46 Affen in Frage.

2. Folgerung: Von den 50 Bananen sind also nur 46 von Bedeutung.

Im *2. Schritt* zeigen wir, dass 46 keine Lösung ist. Begründung: Damit 46 Affen glücklich werden, bräuchte man 138 Obststücke ($46 \cdot 3$). Heute gibt es aber nur 136 Obststücke von Bedeutung ($20+30+40+46$; 46 statt 50, siehe die 2. Folgerung). Da 136 kleiner als 138 ist, ist 46 keine Lösung.

Alternativlösung:

Im *1. Schritt* untersuchen wir zunächst, an wie viele Affen zwei Obstsorten ohne Banane verteilt werden können. Es gibt 90 ($20+30+40$) Früchte, die keine Bananen sind. $90:2=45$, es sind also höchstens 45 Affen.

Im *2. Schritt* ergänzen wir noch die zwei Obstsorten mit je einer Banane. Beachte: Wie dies erfolgen kann, wurde in der ersten Lösung beschrieben. Hier wurden auch die Möglichkeiten mit weniger als 45 Affen geschildert.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

6. Jemand wählte zwischen 1000 und 2000 eine ungerade Zahl aus. Anschließend zählte er zu dieser Zahl die Summe aller ihrer Ziffern hinzu und erhielt so eine neue Zahl. Von der neuen Zahl zählte er schließlich alle Ziffern zusammen und schrieb das Ergebnis auf.

Die Frage: Welches Ergebnis kann er aufgeschrieben haben?

Lösungshinweis: Ungerade Zahlen sind 1, 3, 5, 7, 9, 11 usw. Also jene ganze Zahlen, die nicht durch 2 teilbar sind.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2**, **3**, **4** und **5** Lösungen sind.

Für 1981 gilt: $1981+(1+9+8+1)=2000$ und 2 + 0 + 0 + 0 = **2**.

Für 1977 gilt: $1977+(1+9+7+7)=2001$ und 2 + 0 + 0 + 1 = **3**.

Für 1001 gilt: $1001+(1+0+0+1)=1003$ und 1 + 0 + 0 + 3 = **4**.

Für 1987 gilt: $1987+(1+9+8+7)=2012$ und 2 + 0 + 1 + 2 = **5**.

In **Teil 2** zeigen wir, dass 1 keine Lösung ist. Begründung: 1 könnte nur dann entstehen, wenn die Ziffern des Ergebnisses *eine* 1 und sonst ausschließlich Nullen wären (10, 100, 1000, 10000, usw.). Solche Zahlen können aber als

Ergebnis nicht entstehen. Denn: Wenn wir zu einer ungeraden Zahl zwischen 1000 und 2000 die Summe ihrer Ziffern addieren, erhalten wir eine Zahl, die größer als 1000 aber kleiner als 10000 ist. Damit hat das Ergebnis *mehr* als *eine* Ziffer, die nicht Null ist.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

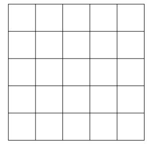
7. Sophia denkt sich vier unterschiedliche positive ganze Zahlen aus (alle nicht Null). Daniel weiß davon, kennt aber keine der Zahlen. Sophia verrät Daniel zunächst die Summe der zwei kleinsten Zahlen. Dies reicht Daniel aber nicht aus, um diese zwei Zahlen herauszufinden. Daraufhin verrät Sophia außerdem, dass die Summe aller vier Zahlen 15 beträgt. Damit kann Daniel nun alle vier Zahlen herausfinden.
Welche der aufgeführten Zahlen konnte sich Sophia ausgedacht haben?
Bemerkung: Zum Herausfinden der Zahlen musste Daniel nicht raten. Er konnte sich durch Nachdenken seiner Lösung sicher sein.

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass die Summe der zwei kleinsten Zahlen 5 ist. Begründung: 5 kann auf zwei Arten entstehen: $1+4=5$ oder $2+3=5$. Daher konnte Daniel die zwei kleinsten Zahlen nicht herausfinden (sie könnten ja entweder 1 und 4 oder 2 und 3 sein). Bei 4 oder 3 wären die zwei kleinsten Zahlen hingegen eindeutig gewesen, denn 3 = 1 + 2 und 4 = 1 + 3 (4 = 2 + 2 geht nicht, da die Zahlen unterschiedlich sein müssen). Bei 3 oder 4 hätte also Daniel die zwei kleinsten Zahlen herausfinden können.
Beachte: Die Summe der zwei kleinsten Zahlen kann nicht 6 oder mehr sein.
Dies schildern wir an einem Beispiel: 6 = 2 + 4. Die Summe der anderen zwei Zahlen muss also 9 sein (15 – 6). Andererseits sind die anderen zwei Zahlen größer als 2 und 4, also kommen nur 5, 6, 7, 8 und 9 in Frage. Die Summe keiner dieser zwei Zahlen ergibt jedoch 9 (z. B. 5 + 6 = 11).
Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Beispiele untersuchen.
In **Teil 2** ermitteln wir alle vier Zahlen. Die Summe der zwei kleinsten Zahlen ist 5 (siehe Teil 1). Die Summe der anderen zwei Zahlen muss damit 10 sein (15 – 5).
Feststellung: Die kleinste der anderen zwei Zahlen ist mindestens 4. Begründung: Einerseits ist $1+4=5$ oder $2+3=5$. Andererseits müssen die anderen Zahlen größer sein als die ersten zwei Zahlen.
10 kann man nun nur noch so darstellen: 10 = 4 + 6.
Beachte: 10 = 5 + 5 geht nicht, da alle Zahlen verschieden sein müssen.
Damit brauchen wir die Zahl 4 unbedingt für die Darstellung von 10. Daher entfällt die Möglichkeit $1+4=5$ für die 5, es bleibt nur $2+3=5$.
Wir haben gezeigt, dass Sophia an die Zahlen **2**, **3**, **4** und 6 denken musste.

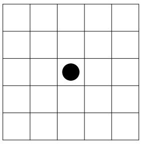
Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

8. Auf einige Felder eines 5×5 Brettes hat jemand Steine gelegt. Es gilt: In jedem 3×3 Bereich des Brettes steht genau ein Stein. Wie viele Steine können insgesamt auf dem Brett stehen?

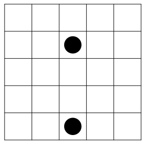


(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

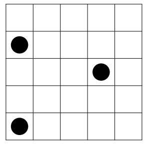
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **1**, **2**, **3** und **4** Steine möglich sind. Dazu geben wir jeweils ein passendes Beispiel an:



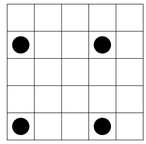
1 Stein



2 Steine

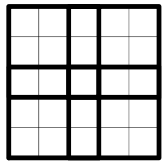


3 Steine



4 Steine

In **Teil 2** zeigen wir, dass 5 <u>keine</u> Lösung ist. Dazu betrachten wir jene vier 3×3 Bereiche, die die vier Eckfelder enthalten. Die Umrisse dieser Bereiche sind **fett** eingezeichnet. Da die vier Bereiche das ganze 5x5 Brett abdecken (einige Felder sogar mehrmals), können auf dem Brett auch höchstens 4 Steine stehen. Daraus folgt: 5 (oder mehr) ist also <u>nicht</u> möglich.



Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

9. Es gibt acht Zahlkarten: Zwei Zahlkarten mit der 1, zwei mit der 2, zwei mit der 3 und zwei mit der 4. Jemand hat diese acht Karten nebeneinandergelegt. Dabei hat er Folgendes berücksichtigt:
Zwischen den zwei 1-er Karten kommt genau *eine* Karte.
Zwischen den zwei 2-er Karten kommen genau *zwei* Karten.
Zwischen den zwei 3-er Karten kommen genau *drei* Karten.
Zwischen den zwei 4-er Karten kommen genau *vier* Karten.
Welche Zahl kann auf der ersten Zahlkarte von links stehen?

(A) *die 1* **(B)** *die 2* **(C)** *die 3* **(D)** *die 4*

(E) *Keine, da sich die Karten in der geforderten Weise gar nicht auslegen lassen.*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2** und **4** möglich sind. Dazu geben wir je ein Beispiel an: **2** 3 4 2 1 3 1 4 und **4** 1 3 1 2 4 3 2. Wir prüfen nun das Beispiel 2 3 4 2 1 3 1 4. Zwischen den zwei 1-er Karten liegt eine Karte (eine 3), zwischen den zwei 2-er Karten liegen zwei Karten (eine 3 und eine 4), zwischen den zwei 3-er Karten liegen drei Karten (eine 4, eine 2 und eine 1), zwischen den zwei 4-er Karten liegen vier Karten (2, 1, 3 und 1).
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge das andere Beispiel prüfen.
In **Teil 2** zeigen wir, dass es keine anderen Lösungen gibt. Unser Ansatz ist: Zwischen den zwei 4-er Karten liegen genau *vier* Karten. Anschaulich:
4 _ _ _ _ 4 (Die vier _ stehen für je eine Karte). Damit haben wir 6 Karten erfasst (die zwei 4 und noch vier unbekannte). Da insgesamt 8 Karten auszulegen sind, sind noch zwei Karten übrig. Es ergeben sich folgende Möglichkei-

ten:
1. Möglichkeit: Vor dem Block 4 _ _ _ _ 4 steht *keine* Karte. Dies führt zum bekannten Beispiel 4 1 3 1 2 4 3 2 aus Teil 1.
2. Möglichkeit: Vor dem Block 4 _ _ _ _ 4 steht *eine* Karte. Anschaulich:
_ 4 _ _ _ _ 4 _
Die erste Karte könnte die 1, die 2 oder die 3 sein. Wir untersuchen nun nach und nach diese Fälle.
1. Versuch: Die *erste* Zahl ist eine *1*: 1 4 1 _ _ _ 4 _. Dann können die zwei 3-er Karten nur noch so liegen: 1 4 1 3 _ _ 4 3 (damit zwischen ihnen drei Karten liegen). Wir können aber die restlichen zwei 2-er Karten jetzt nicht mehr in dieser Auslegung unterbringen. 1 4 1 3 2 2 4 3 geht nicht, denn zwischen den zwei 2-ern liegen keine zwei Karten (sondern gar keine). Der *1. Versuch* führt also zu keiner Lösung.
2. Versuch: Die *erste* Zahl ist eine *2*: 2 4 _ 2 _ _ 4 _. Hier können wir aber die zwei 3-er Karten nicht unterbringen. 2 4 3 2 _ 3 4 _ geht zum Beispiel nicht, weil zwischen den zwei 3-ern keine drei (sondern nur zwei) Karten liegen. Der *2. Versuch* führt ebenfalls zu keiner Lösung.
3. Versuch: Die *erste* Zahl ist eine *3*: 3 4 _ _ 3 _ 4 _. Die zwei 2-er Karten müssen dann so aussehen: 3 4 2 _ 3 2 4 _. Nun fügen wir noch die restlichen 1-er Karten ein: 3 4 2 1 3 2 4 1. Dies geht aber nicht, denn zwischen den zwei 1-ern liegt nicht genau eine Karte (sondern drei). Der *3. Versuch* führt also auch zu keiner Lösung.
Aus den obigen Überlegungen folgt: Die 2. Möglichkeit scheidet damit aus.
3. Möglichkeit: Vor dem Block 4 _ _ _ _ 4 stehen *zwei* Karten. Dies führt zum bekannten Beispiel 2 3 4 2 1 3 1 4 aus Teil 1.
Anregung: Der geneigte Leser möge selbst prüfen, warum die erste Karte 2 und die zweite Karte 3 zeigen muss.
Zusammengefasst: Die erste Zahlkarte kann nur die **2** oder die **4** sein.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D

10. Wir nennen eine mindestens zweistellige positive ganze Zahl *Zebrazahl*, wenn ihre Ziffern abwechselnd gerade und ungerade sind. Beispiele für Zebrazahlen: 25, 234 und 343. **Die Frage**: Welche der aufgeführten Zahlen können als Summe zweier Zebrazahlen dargestellt werden?
Bemerkung: 0, 2, 4, 6, 8 sind gerade Ziffern, 1, 3, 5, 7, 9 ungerade Ziffern.

(A) *2016* **(B)** *2017* **(C)** *2020* **(D)** *2023* **(E)** *3223*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2017**, **2020**, **2023** und **3223** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein passendes Beispiel an. $\mathbf{2017} = 1634 + 383$, $\mathbf{2020} = 1010 + 1010$, $\mathbf{2023} = 1436 + 587$ und $\mathbf{3223} = 3096 + 127$.
In **Teil 2** zeigen wir, dass 2016 keine Lösung ist, d. h. 2016 kann nicht als Summe zweier Zebrazahlen dargestellt werden.
Im *1. Schritt* formulieren wir mehrere Feststellungen.
1. Feststellung: Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.
2. Feststellung: Die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

3. Feststellung: Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

2016 ist eine gerade Zahl. Aus den obigen Feststellungen folgt:

4. Feststellung: 2016 ist entweder die Summe zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen.

5. Feststellung: 2016 kann nicht als Summe zweier dreistelliger Zahlen entstehen. Begründung: Die Summe der zwei größten dreistelligen Zahlen ist $999 + 999 = 1998$, also weniger als 2016.

6. Feststellung: 2016 kann nicht als Summe zweier vierstelliger Zebrazahlen entstehen. Begründung: Die kleinste vierstellige Zebrazahl ist 1010 und $1010 + 1010 = 2020$, also mehr als 2016.

Im *2. Schritt* untersuchen wir, welche Folgen es hätte, wenn 2016 die Summe zweier Zebrazahlen wäre.

Aus der 5. und 6. Feststellung folgt:

7. Feststellung: 2016 wäre die Summe einer dreistelligen und einer vierstelligen Zebrazahl.

Im Folgenden stehen Kästchen für gerade Ziffern und Kreise für ungerade Ziffern. Aus der 7. Feststellung folgt:

8. Feststellung: 2016 entstünde entweder wie in *Figur 1* oder wie in *Figur 2*.

$$\begin{array}{rcccc} & \bigcirc & \square & \bigcirc & \square \\ + & & \square & \bigcirc & \square \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & \square & \bigcirc & \square & \bigcirc \\ + & & \bigcirc & \square & \bigcirc \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & \boxed{2} & \bigcirc & \square & \bigcirc \\ + & & \bigcirc & \square & \bigcirc \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Figur 1 *Figur 2* *Figur 3*

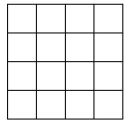
Wir untersuchen nun beide Möglichkeiten.

In *Figur 1* müsste die Summe der ungeraden Zehnerziffern 1 ergeben. Dies wäre jedoch nur mit einem Übertrag von den Einserziffern möglich. Die Summe der zwei Zehnerziffern ergäbe samt Übertrag 11. Wir hätten also auch einen Übertrag 1 für die Hunderterziffern. Dies würde aber bedeuten: Die Summe der zwei geraden Hunderterziffern und der 1 des Übertrags müssten zusammen 0 ergeben. Aus der 1. und 3. Feststellung folgt aber, dass das Ergebnis eine ungerade Zahl sein müsste und nicht 0. Dies zeigt, dass eine Summe wie in *Figur 1* nicht möglich ist.

In *Figur 2* müsste die Tausenderziffer die 2 sein, siehe *Figur 3*. Im Ergebnis 2016 ist die Hunderterziffer die 0. Dies kann aber nur entstehen, wenn die Summe der zwei Hunderterziffern 10 ist. Dies bedeutet einen Übertrag von 1. Durch diesen Übertrag wird aber die Tausenderziffer 3 sein (2 + 1) und nicht 2. Dies zeigt, dass eine Summe wie in *Figur 2* ebenfalls nicht möglich ist.

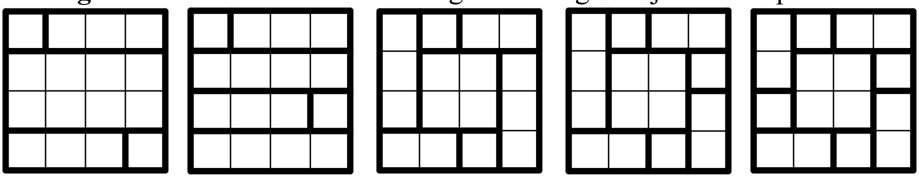
Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

11. Marius zerlegte das 4×4 Quadrat entlang der Gitterlinien in Rechtecke. Er achtete darauf, dass zwei gleich große Rechtecke weder eine gemeinsame Seite noch einen gemeinsamen Eckpunkt haben. In wie viele Rechtecke konnte Marius das 4×4 Quadrat insgesamt zerlegt haben?



(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

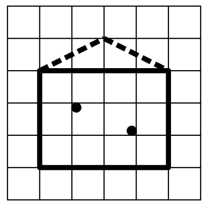
Lösung: Alle fünf Antworten sind möglich. Wir geben je ein Beispiel an:



5 Rechtecke 6 Rechtecke 7 Rechtecke 8 Rechtecke 9 Rechtecke

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

12. Die Figur zeigt einen Ausschnitt aus einer Wand. Die zwei dicken Punkte sind zwei Löcher in der Wand. Fabian möchte diese zwei Löcher durch das Aufhängen eines 4 dm × 3 dm großen Bildes überdecken. Dazu möchte er einen Nagel in die Wand schlagen und anschließend das Bild an einer Schnur aufhängen (in der Figur wurde die Schnur gestrichelt eingezeichnet).

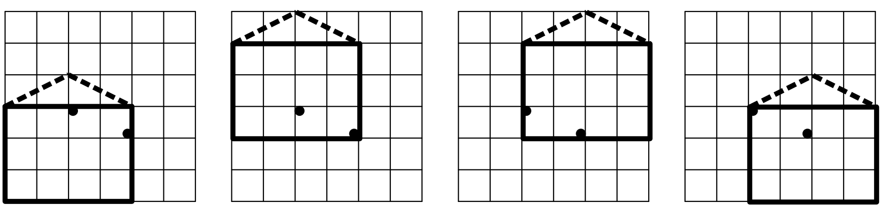


Die Frage: Wie viele dm^2 groß ist die Fläche auf der Wand mit folgender Eigenschaft: Egal in welchem Punkt dieser Fläche der Nagel eingeschlagen wird, das dort aufgehängte Bild überdeckt die zwei Löcher.

<u>Bemerkung</u>: Da das Bild gerade hängen soll, muss sich der Nagel stets in der Mitte der Schnur befinden.

(A) *2* **(B)** *4* **(C)** *8* **(D)** *10* **(E)** *12*

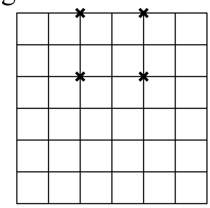
Lösung: In **Teil 1** veranschaulichen wir vier ausgewählte Möglichkeiten:



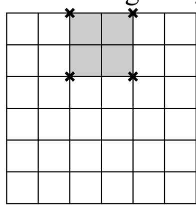
Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

In **Teil 2** konzentrieren wir uns nur auf die möglichen Lagen des Nagels. In *Figur 1* steht der Nagel so tief und so weit links wie möglich. In *Figur 2* steht er so hoch und so weit links wie möglich, in *Figur 3* so hoch und so weit rechts wie möglich, in *Figur 4* so tief und so weit rechts wie möglich. *Figur 5* stellt diese vier Lagen des Nagels dar. Daraus folgt: Die gesuchte Fläche ist die schraffierte Fläche aus *Figur 6*. Egal in welchem Punkt dieser Fläche der

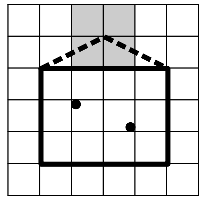
Nagel eingeschlagen wird, das dort aufgehängte Bild deckt die zwei Löcher zu. <u>Beachte</u>: Punkte außerhalb dieser Fläche haben diese Eigenschaft <u>nicht</u>. *Figur 7* zeigt dieselbe Fläche mit dem aufgehängten Bild.



Figur 5



Figur 6



Figur 7

In **Teil 3** berechnen wir die Größe der schraffierten Fläche. Sie beträgt 4 Kästchen und ein Kästchen entspricht 1 dm^2 (da das 4 dm × 3 dm große Bild 4×3 Kästchen entspricht).

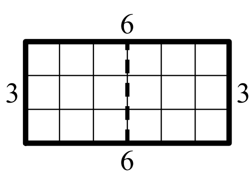
Der gesuchte Flächeninhalt ist also $2\text{ dm} \cdot 2\text{ dm} = \mathbf{4}\text{ dm}^2$.

Die richtige(n) Antwort(en): B

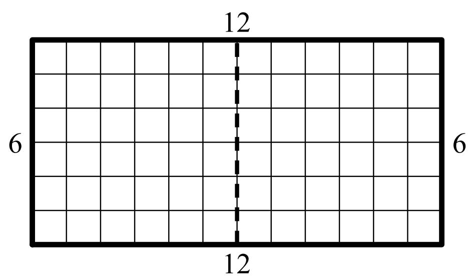
13. Von einem Rechteck aus Papier ist eine Seite 6 cm lang. Die Mittelpunkte der beiden längeren Seiten verbindet man mit einer Linie. Wenn man das Rechteck entlang dieser Linie durchschneidet, entstehen zwei Quadrate. Wie viele cm lang kann der Umfang des ursprünglichen Rechtecks sein?

(A) *12* **(B)** *18* **(C)** *24* **(D)** *30* **(E)** *36*

Lösung: In **Teil 1** untersuchen wir den Fall, dass die *längere* Seite des ursprünglichen Rechtecks 6 cm ist. Die Hälfte von 6 cm ist 3 cm. Da wir zwei Quadrate erhalten, müssen ihre vier Seiten jeweils 3 cm lang sein (*Figur 1*).
Der Umfang des ursprünglichen Rechtecks ist $3+3+6+6=\mathbf{18}$ cm.
In **Teil 2** untersuchen wir den Fall, dass die *kürzere* Seite des ursprünglichen Rechtecks 6 cm ist. Dann wird die andere (längere) Seite halbiert. Die kürzere Seite ist und bleibt 6 cm, die längere Seite ist dann 12 cm ($2 \cdot 6$). Da wir zwei Quadrate erhalten, müssen ihre vier Seiten jeweils 6 cm lang sein (*Figur 2*).
Der Umfang des ursprünglichen Rechtecks ist $6+6+12+12=\mathbf{36}$ cm.



Figur 1



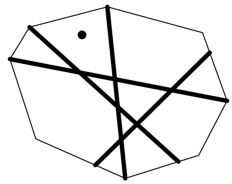
Figur 2

Der gesuchte Umfang ist also **18** cm oder **36** cm.

Die richtige(n) Antwort(en): B, E

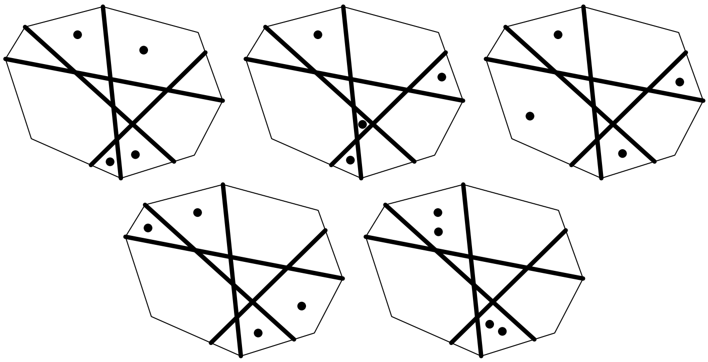
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Die Figur zeigt einen Garten mit vier Wegen (die vier **fett** eingezeichneten Strecken). Im Garten steht ein Baum (er wurde durch den Punkt dargestellt). Euer Auftrag besteht darin, 3 weitere Bäume zu pflanzen, so dass auf beiden Seiten der vier Wege je genau 2 Bäume stehen. Zeichnet 5 unterschiedliche Möglichkeiten!



Lösungshinweis: Fertigt für jede der 5 Möglichkeiten eine getrennte Figur an!

Lösung: Die folgenden Figuren zeigen die 5 Möglichkeiten:



Für die ersten vier korrekten Figuren (egal, welche vier) gibt es je 3 Punkte. Für die fünfte Figur gibt es 4 Punkte (maximal 16 Punkte). Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.