Lösungen – Klasse 8

1. Jemand hat die Länge eines Rechtecks um 99 cm erhöht und die Breite um 1 cm verringert. Der Flächeninhalt des Rechtecks

(A) *nahm dabei auf jeden Fall zu.* **(B)** *nahm dabei auf jeden Fall ab.*

(C) *kann dabei unverändert geblieben sein.*

(D) *muss dabei nicht zugenommen haben.*

(E) *muss dabei nicht abgenommen haben.*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **(D)** eine Lösung und (A) keine Lösung ist. Betrachten wir dazu ein Ausgangsdreieck mit den Maßen 100 cm × 2 cm. 100 cm um 99 cm erhöht ergibt 199 cm, 2 cm um 1 cm verringert ergibt 1 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 199 cm^2. 199 cm^2 ist kleiner als 200 cm^2 (100 cm x 2 cm). Dies bedeutet: **(D)** stimmt und (A) stimmt nicht.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **(E)** stimmt und (B) stimmt nicht. Dazu betrachten wir ein 10 cm × 10 cm Rechteck mit dem Flächeninhalt 100 cm^2. 10 cm um 99 cm erhöht ergibt 109 cm, 10 cm um 1 cm verringert ergibt 9 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 981 cm^2 ($109 \cdot 9 = 981$). 981 cm^2 ist größer als 100 cm^2. Dies bedeutet: **(E)** stimmt und (B) stimmt nicht.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **(C)** stimmt. Dazu betrachten wir ein 990 cm × 11 cm Rechteck mit dem Flächeninhalt 10890 cm^2 ($990 \cdot 11$). 990 cm um 99 cm erhöht ergibt 1089 cm, 11 cm um 1 cm verringert ergibt 10 cm. Damit ist der neue Flächeninhalt 10890 cm^2 ($1089 \cdot 10$). Beide Flächeninhalte sind 10890 cm^2. Dies bedeutet: **(C)** stimmt.
Bemerkung zu Teil 3: Das Ausgangsrechteck sei $a \times b$ mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$. Es entsteht ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $(a+99)\cdot(b-1)$. Die zwei Flächen sind gleich, wenn $a \cdot b = (a+99)\cdot(b-1)$.
Oder, umgeformt, $ab = ab - a + 99b - 99 \Leftrightarrow a = 99b - 99$. Das Beispiel aus Teil 3 entstand mit $b = 11$ und $a = 99 \cdot 11 - 99 = 990$.
Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass die Gleichung $a = 99b - 99$ unendlich viele Lösungen hat. Es gibt also sogar unendlich viele Rechtecke, deren Flächeninhalt unverändert bleibt.

Die richtige(n) Antwort(en): C, D, E

2. Eva schrieb auf ein leeres Blatt sieben verschiedene positive ganze Zahlen mit grüner Farbe. Anschließend wählte Eva zwei der grünen Zahlen aus und bildete deren Summe. Die Summe schrieb sie in roter Farbe auf das Blatt. Dieses Verfahren wiederholte sie dann für alle möglichen Paare aus zwei grünen Zahlen. **Die Frage**: Wie viele unterschiedliche rote Zahlen können sich insgesamt auf dem Blatt befinden?

(A) *10* **(B)** *11* **(C)** *13* **(D)** *21* **(E)** *22*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **11** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die

Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Es sind insgesamt **11** Summen.
Beachte: Einige der Summen sind mehrmals entstanden. Beispiel: 8 als 1 + 7, 2 + 6 und 3 + 5. Laut Fragestellung geht es aber um *unterschiedliche* Zahlen. Daher werden jene Summen, die mehrmals erscheinen, nur einmal gezählt.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **13** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Es sind insgesamt **13** Summen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **21** eine Lösung ist. Wenn Eva zunächst die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 auf das Blatt schrieb, so sind folgende Summen entstanden: 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24, 33, 34, 36, 40, 48, 65, 66, 68, 72, 80, 96. Es sind insgesamt **21** Summen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass 10 keine Lösung ist. Tatsächlich, egal welche sieben Zahlen Eva aufs Blatt schrieb, es gibt stets mindestens 11 verschiedene Summen. Wir schildern das Phänomen an den sieben Zahlen aus Teil 1:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. In diesem Fall entstehen folgende 11 verschiedene Summen:
1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 1 + 5 = 6, 1 + 6 = 7, 1 + 7 = 8, 2 + 7 = 9,
3 + 7 = 10, 4 + 7 = 11, 5 + 7 = 12, 6 + 7 = 13.
Beachte: Bei anderen Zahlen kann man die 11 Summen ähnlich bilden.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 22 keine Lösung ist. Tatsächlich, egal welche sieben Zahlen Eva auch aufs Blatt schrieb, es gibt stets höchstens 21 verschiedene Summen. Wir schildern das Phänomen an den sieben Zahlen aus Teil 3:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Alle 21 Summen aus Teil 3 kommen *nur einmal* vor d, h. es gibt *keine Wiederholungen* (wie z. B. 1 + 7 = 2 + 8). Daraus folgt, dass 21 die größte Anzahl der Summanden darstellt. 22 ist daher nicht möglich.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D

3. An einem Schachturnier spielte Daniel 20 Spiele und gewann insgesamt 12,5 Punkte. Ein Sieg ist 1 Punkt, ein Unentschieden 0,5 Punkte und eine Niederlage 0 Punkte wert. **Die Frage**: Wie viele Spiele kann Daniel insgesamt mehr gewonnen haben als verloren?

(A) *3* **(B)** *4* **(C)** *5* **(D)** *6* **(E)** *7*

In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein. Die Anzahl der Spiele, die Daniel gewann, sei *x*. Die Anzahl der Spiele, die bei Daniel unentschieden endeten, sei *y*. Die Anzahl der Spiele, die Daniel verlor, sei *z*.
In **Teil 2** stellen wir Gleichungen auf. „Daniel spielte 20 Spiele“ bedeutet:

$$x + y + z = 20 \qquad \text{I.}$$

„Daniel gewann insgesamt 12,5 Punkte“ bedeutet:

$$x \cdot 1 + y \cdot 0{,}5 + z \cdot 0 = 12{,}5 \qquad \text{II.}$$

Wir multiplizieren beide Seiten von II. mit 2. Wir erhalten:

$$2x + y = 25 \qquad \text{III.}$$

Ziehen wir aus der Gleichung III. die Gleichung I. ab, bekommen wir:

$$x - z = 5 \qquad \text{IV.}$$

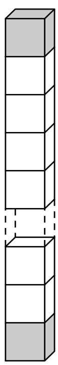
In **Teil 3** deuten wir die Gleichung IV. Die linke Seite, $x - z$, ergibt genau die gesuchte Differenz zwischen Daniels gewonnenen und verlorenen Spielen. Diese Differenz beträgt daher **5** (die rechte Seite von IV.).
Wir müssen aber noch zeigen, dass diese Differenz 5 tatsächlich möglich ist. Wenn Daniel 12 Spiele gewann, 7 verlor und 1 Unentschieden spielte, dann ist $12 - 7 = 5$ und die anderen Bedingungen sind auch erfüllt.
Anregung: Der geneigte Leser möge dies prüfen.

Die richtige(n) Antwort(en): C

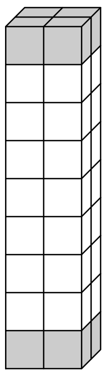
4. Bei einem weißen Quader ist die Grundfläche ein Quadrat. Alle Seitenflächen dieses Quaders werden nun mit Rot gestrichen. Anschließend schneidet jemand den Quader durch gerade Schnitte in gleich große Würfel (der Quader fällt dabei nicht auseinander). Man stellt fest: Unter den entstandenen Würfeln sind genau 28 Würfel mit folgender Eigenschaft: Jeder von ihnen hat genau 2 rot gestrichene, benachbarte Seitenflächen.
Die Frage: In wie viele gleich große Würfel konnte der Quader insgesamt zerschnitten worden sein?

(A) *56* **(B)** *63* **(C)** *72* **(D)** *75* **(E)** *80*

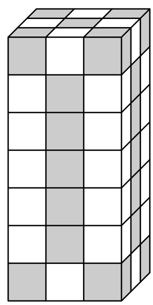
Lösung: In **Teil 1** formulieren wir eine Feststellung und stellen einen Plan der Lösung auf.
Feststellung: Durch das Zerschneiden des Quaders in gleich große Würfel wird das Quadrat der Grundfläche in gleich große Quadrate zerlegt.
Plan der Lösung: Wir führen eine Fallunterscheidung danach durch, in wie viele kleine Quadrate die Grundfläche des Quaders zerlegt wurde.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

In **Teil 2** führen wir den Plan der Lösung aus.
1. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 1×1 (wurde also nicht zerlegt, siehe *Figur 1*). Die zwei Würfel ganz oben und ganz unten werden genau 5 rote Seitenflächen haben, alle anderen Würfel genau 4 rote Seitenflächen – statt 2. Dieser Fall liefert also keine Lösung.
2. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 2×2, siehe *Figur 2*. Die vier Würfel ganz oben und die vier Würfel ganz unten werden genau 3 rote Seitenflächen

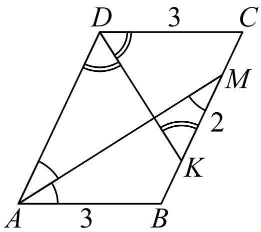
haben, alle anderen Würfel je genau 2. Auf jedem Stockwerk gibt es vier Würfel. Um genau 28 Würfel mit der gesuchten Eigenschaft zu erhalten, muss der Quader aus 9 Stockwerken bestehen. Denn: 28 : 4 = 7 und 1 + 7 + 1 = 9. Somit wurde der Quader in insgesamt 36 ($9 \cdot 4$) Würfel zerlegt.
Beachte: Der Wert 36 befindet sich aber nicht unter den aufgeführten Zahlen.
3. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 3×3, siehe *Figur 3*. Jene Würfel, die genau 2 rote Seitenflächen haben liegen entlang der Kanten des Quaders, sind jedoch keine Eckwürfel.
Beachte: In *Figur 3* wurden die Seitenflächen jener Würfel schraffiert, die diese Eigenschaft nicht haben (weil sie entweder 3 oder nur 1 rote Fläche besitzen).
Auf jedem Stockwerk des Quaders gibt es je genau vier Würfel mit der gesuchten Eigenschaft. Um genau 28 Würfel mit der gesuchten Eigenschaft zu erhalten, muss der Quader aus 7 Stockwerken bestehen. Begründung: 28 : 4 = 7. Auf jedem Stockwerk des Quaders befinden sich 9 Würfel (3×3). Somit wurde der Quader in insgesamt **63** ($7 \cdot 9$) Würfel zerlegt.
4. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 4×4. Auf den Stockwerken ganz oben und ganz unten gibt es je 8 der gesuchten Würfel, auf allen anderen Stockwerken je 4. Um genau 28 Würfel mit der gesuchten Eigenschaft zu erhalten, muss der Quader aus 5 Stockwerken bestehen. Begründung: 8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28. Auf jedem Stockwerk des Quaders befinden sich 16 Würfel (4×4). Somit wurde der Quader in insgesamt **80** ($5 \cdot 16$) Würfel zerlegt.
5. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 5×5. Auf den Stockwerken ganz oben und ganz unten gibt es je 12 der gesuchten Würfel, auf allen anderen Stockwerken je 4. Um genau 28 Würfel mit der gesuchten Eigenschaft zu erhalten, muss der Quader aus 3 Stockwerken bestehen. Begründung: 12 + 4 + 12 = 28. Auf jedem Stockwerk des Quaders befinden sich 25 Würfel (5×5). Somit wurde der Quader in insgesamt **75** ($3 \cdot 25$) Würfel zerlegt.
6. Fall: Die Grundfläche des Quaders ist 6×6. Auf den Stockwerken ganz oben und ganz unten gibt es je 16 der gesuchten Würfel, insgesamt also 32. Da 32 mehr als 28 ist, liefert dieser Fall keine Lösung.
Beachte: Wenn die Grundfläche größer als 6×6 ist, gibt es ebenfalls keine Lösung. Dies folgt aus dem 6. Fall.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D, E

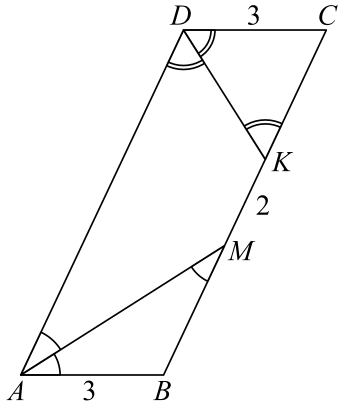
5. Im Parallelogramm *ABCD* schneidet die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite *BC* im Punkt *M*, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ADC$ schneidet die Seite *BC* im Punkt *K*. Ferner gilt: $\overline{KM} = 2$ cm und $\overline{AB} = 3$ cm.
Die Frage: Wie viele cm lang kann die Seite *BC* des Parallelogramms sein?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** untersuchen wir die gegenseitige Lage der Punkte *K* und *M*. Es gibt zwei Möglichkeiten: *M* liegt näher bei *C* als *K* (siehe *Figur 1*) oder *K* liegt näher bei *C* als *M* (siehe *Figur 2*).



Figur 1



Figur 2

In **Teil 2** formulieren wir einige Feststellungen, die für beide Figuren gelten.
<u>1. Feststellung</u>: $\sphericalangle MAD = \sphericalangle AMB$ (als Wechselwinkel, denn $AD \parallel BC$).
<u>2. Feststellung</u>: $\overline{BM} = \overline{BA} = 3$ cm. Begründung: $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAB$ *(AM* ist Winkelhalbierende). Aus der 1. Feststellung folgt: $\sphericalangle AMB = \sphericalangle MAB$. Damit ist das Dreieck ΔABM gleichschenklig mit $\overline{BM} = \overline{BA} = 3$ cm.
<u>3. Feststellung</u>: $\overline{CK} = \overline{CD} = 3$ cm (ähnlich, wie bei der 2. Feststellung).
<u>Anregung</u>: Der geneigte Leser möge die 3. Feststellung prüfen.
In **Teil 3** ermitteln wir die möglichen Längen für die Seite *BC*.
In *Figur 1* gilt: $\overline{BC} = \overline{BK} + \overline{KC} = \left(\overline{BM} - \overline{KM}\right) + \overline{KC} = (3-2) + 3 = \mathbf{4}$ cm.
In *Figur 2* gilt: $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MK} + \overline{KC} = 3 + 2 + 3 = \mathbf{8}$ cm.

Die richtige(n) Antwort(en): A, E

6. In einem zoologischen Garten leben viele Affen. Ein Affe ist an einem Tag nur dann glücklich, wenn er an dem Tag drei unterschiedliche Obstsorten gegessen hat. Heute gibt es 20 Äpfel, 30 Aprikosen, 40 Orangen und 50 Bananen. Wie viele Affen können heute insgesamt glücklich werden?

(A) *40* **(B)** *41* **(C)** *43* **(D)** *45* **(E)** *46*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **45** eine Lösung ist. Zum Beispiel dann, wenn 5 Affen je einen Apfel, eine Aprikose und eine Banane bekommen, 15 Affen je einen Apfel, eine Orange und eine Banane erhalten und 25 Affen je eine Aprikose, eine Orange und eine Banane erhalten. Dann gibt es 45 (5 + 15 + 25) glückliche Affen. Es wurden 20 Äpfel, 30 Aprikosen, 40 Orangen und 45 Bananen verbraucht.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **43** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen zweier Affen ein anderer Affe erhält.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **41** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen von vier Affen

ein anderer Affe erhält.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **40** eine Lösung ist. Dies können wir erreichen, wenn beispielsweise bei der Verteilung aus Teil 1 die Bananen von fünf Affen ein anderer Affe erhält.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 46 keine Lösung ist.
Im *1. Schritt* zeigen wir, dass 47 keine Lösung ist. Begründung: Damit 47 Affen glücklich werden, bräuchte man 141 Oststücke ($47 \cdot 3$). Heute gibt es aber nur 140 Obststücke ($20+30+40+50$). Da 140 kleiner als 141 ist, ist 47 keine Lösung.
1. Folgerung: Es kommen also nicht mehr als 46 Affen in Frage.
2. Folgerung: Von den 50 Bananen sind also nur 46 von Bedeutung.
Im *2. Schritt* zeigen wir, dass 46 keine Lösung ist. Begründung: Damit 46 Affen glücklich werden, bräuchte man 138 Obststücke ($46 \cdot 3$). Heute gibt es aber nur 136 Obststücke von Bedeutung ($20+30+40+46$; 46 statt 50, siehe die 2. Folgerung). Da 136 kleiner als 138 ist, ist 46 keine Lösung.

Alternativlösung:
Im *1. Schritt* untersuchen wir zunächst, an wie viele Affen zwei Obstsorten ohne Bananen verteilt werden können. Es gibt 90 ($20+30+40$) Früchte, die keine Bananen sind. $90:2=45$, es sind also höchstens 45 Affen.
Im *2. Schritt* ergänzen wir noch die zwei Obstsorten mit je einer Banane. Beachte: Wie dies erfolgen kann, wurde in der ersten Lösung beschrieben. Hier wurden auch die Möglichkeiten mit weniger als 45 Affen geschildert.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D

7. Es sei $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{20}$. Jemand multipliziert x mit einer ganzen Zahl und erhält als Ergebnis ebenfalls eine ganze Zahl. Mit welcher der aufgeführten Zahlen konnte man multipliziert haben?

(A) *15* **(B)** *30* **(C)** *60* **(D)** *120* **(E)** *2017*

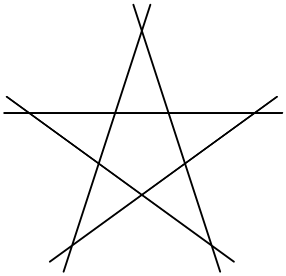
Lösung: Auf den ersten Blick könnte man an den Hauptnenner 60 oder an ein Vielfaches von 60 denken. Der Schein trügt. Tatsächlich, wir berechnen x.
$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{20}=\frac{30-20-15+12-10+3}{60}=\frac{0}{60}=0$. Null mal eine beliebige Zahl ist aber Null. Beispiel: $2017 \cdot 0 = 0$ und das Ergebnis 0 ist eine ganze Zahl. Man konnte daher die Zahl x mit jeder der aufgeführten Zahlen multipliziert haben.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

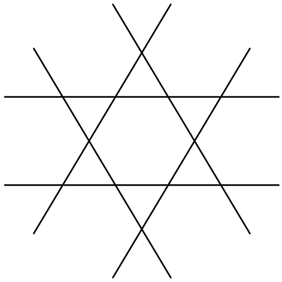
8. Wir betrachten einige Geraden in der Ebene mit folgender Eigenschaft: Jede der Geraden schneidet genau 4 der anderen Geraden. Wie viele Geraden können es insgesamt sein?

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *7* **(D)** *8* **(E)** *9*

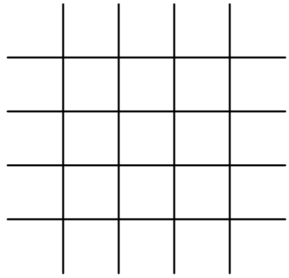
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **5**, **6** und **8** Lösungen sind. Dazu haben wir jeweils eine passende Figur angefertigt.



5 Geraden



6 Geraden



8 Geraden

In **Teil 2** zeigen wir, dass es keine anderen Lösungen gibt. Die Gesamtzahl der Geraden bezeichnen wir mit n (wobei $n > 5$). Wir betrachten nun eine beliebig ausgewählte Gerade, die wir mit g bezeichnen. g schneidet von den anderen $n-1$ Geraden genau 4.

1. Feststellung: Die Gerade g schneidet $n-4$ Geraden nicht.

2. Feststellung: Wenn zwei Geraden sich nicht schneiden, dann sind sie parallel zueinander.

Daraus folgt:

3. Feststellung: Die $n-4$ Geraden aus der 1. Feststellung sind parallel zueinander.

Beachte: Die Einschränkung $n > 5$ war nur deswegen erforderlich, da für $n = 5$ $5 - 4 =$ „1 parallele Gerade" keinen Sinn ergibt.

4. Feststellung: Die 3. Feststellung gilt für jede Gerade.

Dies bedeutet:

5. Feststellung: Die n Geraden können in Gruppen unterteilt werden, so dass jede Gruppe aus $n-4$ parallelen Geraden besteht.

Beachte: Zwei Geraden aus zwei unterschiedlichen Gruppen können nicht parallel zueinander verlaufen.

Aus der 5. Feststellung folgt:

6. Feststellung: Die Anzahl der Gruppen beträgt $\frac{n}{n-4}$.

7. Feststellung: $\frac{n}{n-4}$ ist eine positive ganze Zahl (als Anzahl).

Wir formen nun $\frac{n}{n-4}$ geschickt um:

$$\frac{n}{n-4} = \frac{n-4+4}{n-4} = \frac{n-4}{n-4} + \frac{4}{n-4} = 1 + \frac{4}{n-4} \qquad (*)$$

Aus (*) und aus der 7. Feststellung folgt:

8. Feststellung: $n-4$ ist ein positiver Teiler von 4.

Die positiven Teiler von 4 sind 1, 2 und 4.

$n-4=1$ ergibt $n=5$, $n-4=2$ ergibt $n=6$ und $n-4=4$ ergibt $n=8$.

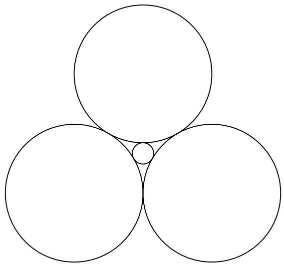
Damit ist bewiesen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, D

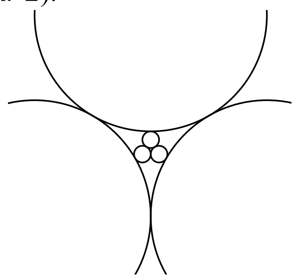
9. Jemand hat einige Kreisscheiben auf einen Tisch gelegt. Jede Kreisscheibe berührt genau drei andere Kreisscheiben. Wie viele Kreisscheiben können insgesamt auf dem Tisch liegen?

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4** und **6** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein Beispiel an (siehe *Figur 1* und *Figur 2*).

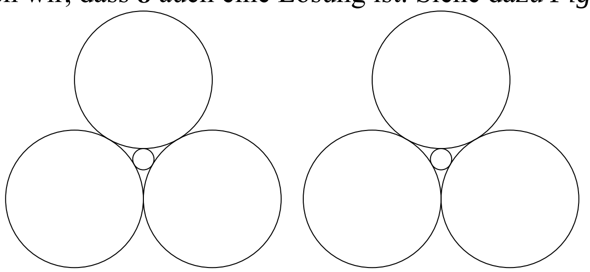


Figur 1



Figur 2

In **Teil 2** zeigen wir, dass **8** auch eine Lösung ist. Siehe dazu *Figur 3*.



Figur 3

In **Teil 3** zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Tatsächlich: Wenn es genau 5 Kreisscheiben gäbe und jede genau drei berührte, dann gäbe es $5 \cdot 3 = 15$ Berührpunkte. Da jeder Berührpunkt auf genau zwei Kreisen liegt, werden sie doppelt gezählt. Um das richtige Ergebnis zu erhalten, müssten wir 15 noch durch 2 teilen: $\frac{15}{2} = 7{,}5$. Dies geht nicht, da die Anzahl der Berührpunkte ganzzahlig sein muss. Damit ist bewiesen, dass 5 keine Lösung ist.

Beachte: Ähnlich lässt sich zeigen, dass 7 ebenfalls keine Lösung ist.

Anregung: Der geneigte Leser möge dies wie in Teil 3 prüfen.

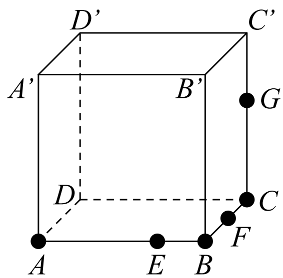
Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass keine ungerade Zahl eine Lösung ist.

Die richtige(n) Antwort(en): A, C, E

10. Thomas markiert auf der Oberfläche eines Würfels einige Punkte, so dass folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt keine zwei Seitenflächen mit gleich vielen markierten Punkten.
Wie viele Punkte konnte Thomas insgesamt markiert haben?
Bemerkung: Ein Punkt einer Kante liegt auf beiden angrenzenden Seitenflächen (und sogar auf drei, wenn es sich um einen Eckpunkt handelt).

(A) *5* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *12* **(E)** *15*

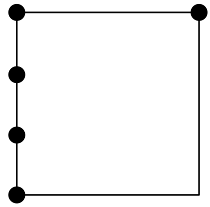
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6** eine Lösung ist. Dazu haben wir sechs passende Punkte markiert (siehe *Figur 1*). Tatsächlich, *A'B'C'D'* hat 0 Punkte, *ADD'A'* hat 1 Punkt usw.
Anregung: Der geneigte Leser möge alle Seitenflächen paarweise untersuchen.



Figur 1

In **Teil 2** zeigen wir, dass **10** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 4 weitere Punkte markieren.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **12** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 6 weitere Punkte markieren.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **15** eine Lösung ist. Tatsächlich, es reicht, wenn wir bei *Figur 1* im Inneren des Quadrates *ABCD* 9 weitere Punkte markieren.
In **Teil 5** zeigen wir, dass 5 keine Lösung darstellt.
Nehmen wir für einen Augenblick an, dass 5 doch eine Lösung wäre und untersuchen wir diese Annahme.
1. Feststellung: Die Anzahlen der Punkte auf den sechs Seitenflächen sind 0, 1, 2, 3, 4, 5. Begründung: Um die Bedingung der Aufgabe zu erfüllen, muss auf jeder Seitenfläche eine andere Anzahl von Punkten stehen.
2. Feststellung: Wenn wir die Punkte auf allen Seitenflächen zusammenzählen, erhalten wir 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.
Da es in der Tat nur 5 Punkte gibt, wurden die Punkte mehrfach gezählt.
3. Feststellung: Jeder Punkt muss genau dreimal gezählt worden sein. Begründung: 15 : 3 = 5, die tatsächliche Anzahl der Punkte.
Aus der 3. Feststellung folgt:
4. Feststellung: Jeder der 5 Punkte ist ein Eckpunkt.
Dies bedeutet aber: Auf keiner Seitenfläche können genau 5 Punkte liegen. Denn jede Seitenfläche hat genau vier, keine 5 Eckpunkte. Dies zeigt, dass 5 keine Lösung darstellt.

Alternativlösungsansatz zu Teil 5:
Figur 2 zeigt jene Seitenfläche, auf der 5 Punkte liegen. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche gibt es dann keine Punkte. Bei dieser Verteilung der Punkte (*Figur 2*) können auf keiner der Seitenflächen genau 3 Punkte liegen.



Figur 2

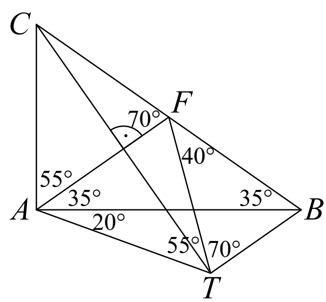
Anregung: Der geneigte Leser möge andere Verteilungen der 5 Punkte selbst prüfen. 5 stellt daher keine Lösung dar.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

11. Im Dreieck *ABC* ist $\alpha = 90°$ und $\beta = 35°$. Der Mittelpunkt der Seite *BC* ist *F*, der Spiegelpunkt von *C* an *AF* ist *T*. Wie groß kann der Winkel $\sphericalangle ATB$ sein?

(A) *115°* **(B)** *120°* **(C)** *125°* **(D)** *130°* **(E)** *135°*

Lösung: In **Teil 1** berechnen wir die Winkel γ, $\sphericalangle CAF$, $\sphericalangle BAF$, $\sphericalangle AFC$. Aus der Winkelsumme folgt: $\gamma = 180° - (90° + 35°) = 55°$. Das rechtwinklige Dreieck ABC kann als die Hälfte eines Rechtecks aufgefasst werden. *BC* ist die eine Diagonale, *AF* die Hälfte der anderen Diagonale, *F* ist der gemeinsame Mittelpunkt der zwei Diagonalen. Es gilt: $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FC}$. Die Dreiecke $\Delta\, FAC$ und $\Delta\, FAB$ sind beide gleichschenklig. Dies bedeutet: $\sphericalangle CAF = 55°$ und $\sphericalangle BAF = 35°$. Aus der Winkelsumme folgt:
$\sphericalangle AFC = 180° - (55° + 55°) = 70°$.



In **Teil 2** berechnen wir die Winkel $\sphericalangle FAT$, $\sphericalangle BAT$, $\sphericalangle ATF$, $\sphericalangle TFA$, $\sphericalangle TFB$ und $\sphericalangle FTB$. Wegen der Spiegelung ist $\sphericalangle FAT = \sphericalangle FAC$ und $\sphericalangle FAT = 55°$. Es gilt: $\sphericalangle BAT = \sphericalangle FAT - \sphericalangle FAB$ $= 55° - 35° = 20°$. Außerdem ist $\overline{FT} = \overline{FC}$ und somit $\overline{FT} = \overline{FA} = \overline{FB}$. Die Dreiecke $\Delta\, FTA$ und $\Delta\, FTB$ sind ebenfalls gleichschenklig und daher ist $\sphericalangle ATF = \sphericalangle FAT = 55°$ bzw. $\sphericalangle TFA = 180° - (55° + 55°) = 70°$ Ferner gilt:

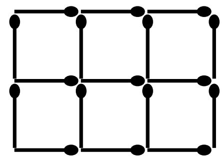
$\sphericalangle TFB = 180° - (\sphericalangle TFA + \sphericalangle AFC) = 180° - (70° + 70°) = 40°$ und

$\sphericalangle FTB = (180° - \sphericalangle TFB) : 2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$.

In **Teil 3** berechnen wir nun den gesuchten Winkel $\sphericalangle ATB$.
$\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATF + \sphericalangle FTB = 55° + 70° = \mathbf{125°}$.

Die richtige(n) Antwort(en): C

12. Das nebenstehende Rechteck besteht aus 17 Streichhölzern und 6 kleinen Quadraten. Jemand legt aus 52 Streichhölzern ein neues Rechteck, das ebenfalls aus solchen kleinen Quadraten besteht. Aus wie vielen Streichhölzern kann der Umfang des neuen Rechtecks insgesamt bestehen?



Bemerkung: Die Seite jedes kleinen Quadrates ist ein ganzes Streichholz.

(A) *20* **(B)** *24* **(C)** *36* **(D)** *44* **(E)** *48*

Lösung: In **Teil 1** führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Das neue Rechteck hat die Form $m \times n$. Genauer: In jeder Zeile sind m, in jeder Spalte sind n Quadrate (m und n sind positive ganze Zahlen).

1. Feststellung: Es gibt insgesamt $(m+1) \cdot n$ senkrechte Streichhölzer.

2. Feststellung: Es gibt insgesamt $(n+1) \cdot m$ waagerechte Streichhölzer.

Erläuterung an der Figur aus dem Aufgabentext: $m = 3$ und $n = 2$. Es gibt insgesamt 8 senkrechte Streichhölzer, und $(3+1) \cdot 2 = 8$. Es gibt ferner insgesamt 9 waagerechte Streichhölzer, und $(2+1) \cdot 3 = 9$. Und 8 + 9 = 17, es stimmt also.

3. Feststellung: Das neue Rechteck hat insgesamt $(m+1) \cdot n + (n+1) \cdot m$ Streichhölzer. Oder, umgeformt: $nm + m + mn + n = 2mn + m + n$.

Andererseits besteht das Rechteck aus 52 Streichhölzern. Daraus folgt:

4. Feststellung: $2mn + m + n = 52$ (1)

In **Teil 2** ermitteln wir m und n. Dazu formen wir zunächst (1) geschickt um.

(1) mal 2 ergibt $4mn + 2m + 2n = 104$ (2)

(2) plus 1 liefert $4mn + 2m + 2n + 1 = 105$ (3)

Es gilt: $4mn + 2m + 2n + 1 = (2m+1)(2n+1)$ (4)

Probe durch Ausmultiplizieren: $(2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$.

Aus (3) und (4) folgt: $(2m+1)(2n+1) = 105$ (*)

Wir zerlegen nun 105 in ein Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen auf allen möglichen Arten: 105 = $1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$ (**)

Durch (*) und (**) ergeben sich folgende Fälle:

1. Fall: $2m + 1 = 1$ und $2n + 1 = 105 \Rightarrow m = 0$ und $n = 52$. Dies geht jedoch nicht, da m streng positiv sein muss.

2. Fall: $2m + 1 = 3$ und $2n + 1 = 35 \Rightarrow m = 1$ und $n = 17$.

3. Fall: $2m + 1 = 5$ und $2n + 1 = 21 \Rightarrow m = 2$ und $n = 10$.

4. Fall: $2m + 1 = 7$ und $2n + 1 = 15 \Rightarrow m = 3$ und $n = 7$.

Beachte: Fälle wie z. B. $2n + 1 = 5$ und $2m + 1 = 21$ liefern nichts Neues, da $m = 10$ und $n = 2$ bekannte Ergebnisse sind bzw. 10×2 und 2×10 ergeben dasselbe Rechteck.

In **Teil 3** berechnen wir die einzelnen Umfänge. Dazu arbeiten wir mit den Ergebnissen aus den Fällen 2., 3. und 4. aus Teil 2. Die Formel für den Umfang lautet $U = 2\cdot(m+n)$.

$m = 1$ und $n = 17 \Rightarrow U = 2\cdot(1+17) = \mathbf{36}$,

$m = 2$ und $n = 10 \Rightarrow U = 2\cdot(2+10) = \mathbf{24}$,

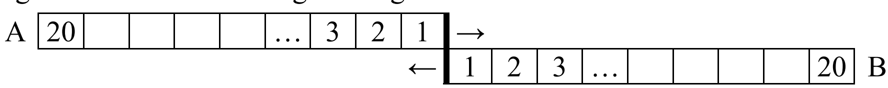
$m = 3$ und $n = 7 \Rightarrow U = 2\cdot(3+7) = \mathbf{20}$.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C

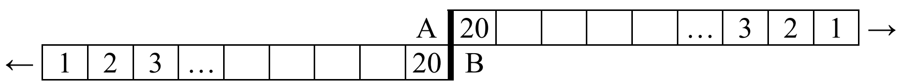
13. Zwei Züge fahren auf zwei parallelen Gleisen in entgegengesetzte Richtungen mit derselben konstanten Geschwindigkeit. Beide Züge bestehen aus je 20 Waggons, die alle gleich lang sind. In einem Zug sitzt Anna im 4-ten Waggon von vorne. Im anderen Zug fährt Bea. Nachdem die zwei Züge sich begegnet sind (die vordersten Punkte der ersten Waggons sind nebeneinander) vergehen 36 Sekunden, bis Annas Waggon sich genau neben Beas Waggon befindet (ohne dass der eine über den anderen hinausragt). Anschließend vergehen noch weitere 44 Sekunden, bis sich die Züge wieder trennen (die hintersten zwei Punkte der letzten Waggons sind nebeneinander).
Die Frage: Im wievielten Waggon von vorne kann Bea in ihrem Zug sitzen?
<u>Bemerkung</u>: Im ersten Waggon ist auch die Lokomotive untergebracht.

(A) *13.* **(B)** *14.* **(C)** *15.* **(D)** *16.* **(E)** *17.*

Lösung: In **Teil 1** veranschaulichen wir das Geschehen und formulieren eine Feststellung. A sei der Zug in dem Anna, B der Zug in dem Bea sitzt. *Figur 1* zeigt jene Lage der Züge, bei der die vordersten Punkte der ersten Waggons nebeneinander ankommen. *Figur 2* zeigt jene Lage, bei der die hintersten zwei Punkte der letzten Waggons nebeneinander sind. Die vordersten bzw. hintersten Punkte wurden durch fette senkrechte Linien hervorgehoben.
<u>1. Feststellung</u>: Bis die Lage aus *Figur 1* in die Lage aus *Figur 2* übergeht, vergehen 80 Sekunden. Begründung: $36 + 44 = 80$.



Figur 1



Figur 2

In **Teil 2** ermitteln wir weitere Teilergebnisse.

<u>2. Feststellung</u>: Beide Züge legen eine Waggonlänge in 4 Sekunden zurück. Begründung: Während der 80 Sekunden aus der 1. Feststellung legten beide Züge 20 volle Waggonlängen zurück (siehe die fett eingezeichneten Linien in *Figur 1* und *Figur 2*) und 80 : 20 = 4.

<u>3. Feststellung</u>: In den 36 Sekunden nach der Lage in *Figur 1* sind beide Züge um 9 volle Waggonlängen vorangekommen. Denn: 36 : 4 = 9.
In **Teil 3** beantworten wir die eigentliche Frage. Wenn nur der Zug A in Bewegung gewesen wäre, so wäre nach den 36 Sekunden der vorderste Punkt

des Zuges A beim vordersten Punkt des 10. Waggons des Zuges B (1 + 9 = 10) gewesen (3. Feststellung). Da sich aber der Zug B auch bewegte, wird nach den 36 Sekunden der vorderste Punkt des Zuges A beim vordersten Punkt des 19. Waggons des Zuges B sein (10 + 9 = 19), siehe *Figur 3*.

A	20	19	18	17	…		…	8	7	6	5	4	3	2	1	→		
		←	1	2	…				…	13	14	**15**	16	17	18	19	20	B

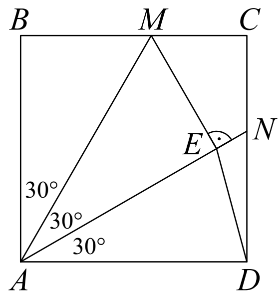
Figur 3

Der 4. Waggon des Zuges A befindet sich daher neben dem **15.** Waggon des Zuges B. In diesem Waggon sitzt Bea.

Die richtige(n) Antwort(en): C

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Im Quadrat *ABCD* liegt der Punkt *M* auf der Seite *BC* und der Punkt *N* auf der Seite *CD*, so dass gilt: $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN = \sphericalangle NAD$. Die Senkrechte aus *M* auf *AN* schneidet diese Strecke im Punkt *E*.
Ermittle die Winkelweite des Winkels $\sphericalangle EDC$!



Lösung: Die Dreiecke ΔABM und ΔAEM sind deckungsgleich (2 Punkte), denn *AM* ist eine gemeinsame Seite, $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN$ (= 30°) und $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AEM = 90°$ (2 Punkte). Daraus folgt: $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AD}$ (2 Punkte). Das Dreieck ΔEAD ist somit gleichschenklig (2 Punkte). $\sphericalangle EAD = 30°$ als ein Drittel von 90° (2 Punkte). Daher gilt:
$\sphericalangle EDA = (180° - 30°) : 2 = 75°$ (2 Punkte), bzw.
$\sphericalangle EDC = \sphericalangle ADC - \sphericalangle EDA = 90° - 75° = 15°$ (2 Punkte).
Antwort: $\sphericalangle EDC = 15°$ (2 Punkte). (Insgesamt maximal 16 Punkte.)