

Lösungen – Klasse 9

1. Ein Viereck wird durch eine seiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt, die beide rechtwinklig *und* gleichschenkelig sind.

Wie groß kann ein Innenwinkel des Vierecks sein?

- (A) 30° (B) 45° (C) 90° (D) 120° (E) 135°

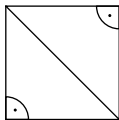
Lösung: In **Teil 1** formulieren wir eine Feststellung und den Lösungsansatz.

Feststellung: Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks sind 45° . Denn: $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ und $90^\circ : 2 = 45^\circ$.

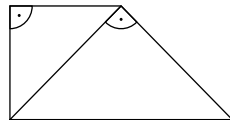
Lösungsansatz: Wir werden „rückwärts denken“. Wir legen zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke entlang einer Seite zusammen und untersuchen das so entstandene Viereck.

In **Teil 2** zeichnen wir alle Möglichkeiten. Die gemeinsame Seite kann in beiden Dreiecken die Hypotenuse sein (*Figur 1*) oder in einem Dreieck eine Kathete und im anderen die Hypotenuse (*Figur 2*) oder in beiden Dreiecken je eine Kathete (*Figur 3* und *Figur 4*).

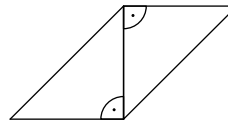
Beachte: *Figur 4* müssen wir verwerfen, da hier kein Viereck entsteht.



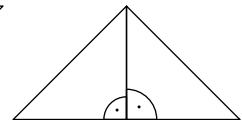
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

In **Teil 3** ermitteln wir die einzelnen Innenwinkel. Bei *Figur 2* und *Figur 3* wenden wir dabei die Feststellung an.

Figur 1: Alle vier Winkel sind 90° (Quadrat).

Figur 2: Die vier Winkel sind 90° , 90° , 45° , 135° .

Figur 3: Die vier Winkel sind 45° , 135° , 45° , 135° .

Bemerkung: Die gesuchten Innenwinkel sind 45° , 90° , oder eine Summe von diesen zwei Winkeln, also $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ oder $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

Die Winkel 30° und 120° sind nicht möglich.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, E

2. Welche der unten aufgeführten Zahlen haben mindestens vier positive unterschiedliche Teiler, die Kubikzahlen sind?

Bemerkung: Kubikzahlen sind Zahlen, die man als Dreierpotenz einer natürlichen Zahl darstellen kann. Beispiel: $64 = 4^3$.

- (A) 7 000 (B) 23 625 (C) 27 000 (D) 74 088 (E) 240 786

Lösung: In **Teil 1** formulieren wir einige Feststellungen.

1. Feststellung: 1 ist eine Kubikzahl. Begründung: $1 = 1^3$.

2. Feststellung: 1 ist Teiler jeder natürlichen Zahl.

Alle Teiler außer 1 heißen „echte Teiler“. Aus der 1. und 2. Feststellung folgt:

3. Feststellung: Gesucht sind jene Zahlen, die außer 1 noch mindestens drei

weitere Kubikzahlen als echte Teiler haben.

In **Teil 2** schreiben wir die aufgeführten Zahlen in Primfaktorstellung und arbeiten anschließend mit der 3. Feststellung.

7000 = $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Diese Zahl hat als echte Teiler folgende Kubikzahlen: $8 = 2^3$, $125 = 5^3$ und $1000 = 10^3 = 2^3 \cdot 5^3$, also drei echte Teiler.

23625 = $3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Diese Zahl hat als echte Teiler folgende Kubikzahlen: $27 = 3^3$, $125 = 5^3$ und $3375 = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3$, also drei echte Teiler.

27000 = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$. Diese Zahl hat als echte Teiler folgende Kubikzahlen: $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $125 = 5^3$, $216 = 6^3$, $1000 = 10^3$, $3375 = 15^3$, $27000 = 30^3$. Es gibt also mehr als drei echte Teiler.

74088 = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Diese Zahl hat als echte Teiler folgende Kubikzahlen: $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $343 = 7^3$, $216 = 6^3$, $2744 = 14^3 = (2 \cdot 7)^3$, $9261 = 21^3 = 3^3 \cdot 7^3$, $74088 = 42^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3$. Es gibt also mehr als drei echte Teiler.

240786 = $2 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 13$. Diese Zahl hat als echte Teiler folgende Kubikzahlen: $27 = 3^3$, $343 = 7^3$ und $9261 = 21^3 = 3^3 \cdot 7^3$, also drei echte Teiler.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

3. Eine positive ganze Zahl n heißt *exotisch*, wenn es zwei (nicht unbedingt verschiedene) positive ganze Zahlen a und b gibt, so dass $n = a^b + b^a$.

Beispiel: 57 ist eine *exotische* Zahl, da $57 = 5^2 + 2^5$.

Die Frage: Welche der unten aufgeführten Zahlen sind *exotisch*?

(A) 8 (B) 17 (C) 32 (D) 33 (E) 37

Lösung: Wir zeigen, dass alle aufgeführten Zahlen *exotisch* sind. Tatsächlich:

8 = $2^2 + 2^2$, **17** = $2^3 + 3^2$, **32** = $2^4 + 4^2$, **33** = $1^{32} + 32^1$ und **37** = $1^{36} + 36^1$.

Bemerkung: Alle positiven ganzen Zahlen größer als 1 sind *exotisch*, denn $n = 1^{n-1} + (n-1)^1$.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

4. In einer Arztpraxis stapelt die Sprechstundenhilfe die Karteikarten der ankommenden Patienten auf dem Tisch des Arztes. Die Karteikarte eines neu ankommenden Patienten wird also stets oben auf den Stapel gelegt. Der Arzt ruft immer jenen Patienten auf, dessen Karteikarte oben liegt. Eines Tages kamen 5 Patienten in die Praxis. Die Sprechstundenhilfe legte deren Karteikarten einzeln auf den Stapel in der Reihenfolge, in der sie ankamen. Diese Reihenfolge war A-B-C-D-E. **Die Frage:** In welcher Reihenfolge kann der Arzt die 5 Patienten behandelt haben?

Bemerkungen: Patienten können in der Praxis ankommen bevor der Arzt mit dem Behandeln beginnt. Während der Behandlungen können zudem weitere Patienten ankommen.

- (A) E-D-C-B-A (B) D-E-B-C-A (C) B-D-C-E-A
(D) C-D-E-A-B (E) A-C-D-E-B

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass (A) eine Lösung ist. Begründung: Die 5 Patienten kamen vor dem Arzt an, in dieser Reihenfolge: A, B, C, D, E. Als der Arzt ankam, lag auf seinem Tisch der Stapel E-D-C-B-A (von oben nach unten).

In **Teil 2** zeigen wir, dass (B) keine Lösung ist. Begründung: Nachdem D behandelt wurde, müsste auf dem Tisch (von oben nach unten) C-B-A liegen. (Denn die Sprechstundenhilfe legt die Patientenkarten einzeln auf den Tisch, in dieser Reihenfolge: A-B-C-D-E.) Da der Arzt stets die oberste Patientenkarte nimmt, ist es nicht möglich, B vor C zu behandeln. (B) ist also keine Lösung.

In **Teil 3** zeigen wir, dass (C) eine Lösung ist. Tatsächlich: Zunächst kamen A und B an. Der Arzt behandelte B. Inzwischen kamen C und D an, so dass auf dem Tisch nun D-C-A lag. Der Arzt behandelte D und nachher C. Während C behandelt wurde, kam E an. E wurde nach C behandelt und als letzter wurde A behandelt.

In **Teil 4** zeigen wir, dass (D) keine Lösung ist. Begründung: Nachdem C behandelt wurde, müsste auf dem Tisch (von oben nach unten) B-A liegen. Es ist also nicht möglich, A vor B zu behandeln. (D) ist also keine Lösung.

In **Teil 5** zeigen wir, dass (E) eine Lösung ist. Tatsächlich: Zunächst kam A an. Während A behandelt wurde, kamen B und C an. Dann wurde C behandelt. Währenddessen kam D an. Als nächster wurde D behandelt. In dieser Zeit kam E an. Anschließend wurden E und dann B behandelt.

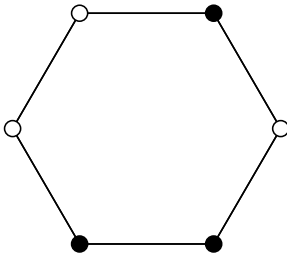
Die richtige(n) Antwort(en): A, C, E

5. Jeder Eckpunkt eines regelmäßigen Vielecks wurde entweder rot oder grün markiert. Unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei gleichfarbige Eckpunkte des Vielecks sind, gibt es kein gleichschenkliges Dreieck. **Die Frage:** Wie viele Eckpunkte kann das regelmäßige Vieleck insgesamt haben?

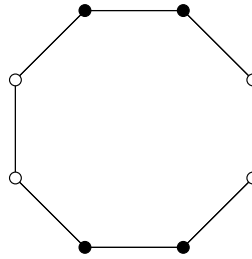
Bemerkung: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **6** und **8** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an. (Weiß steht für Grün, Schwarz für Rot).



Figur 1



Figur 2

Figur 1 ist ein regelmäßiges Sechseck, Figur 2 ein regelmäßiges Achteck. Die Bedingung ist erfüllt.

Anregung: Der geneigte Leser möge dies an einigen Dreiecken prüfen.

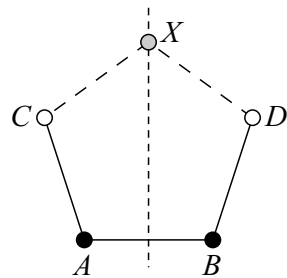
In **Teil 2** zeigen wir, dass **5**, **7** und **9** keine Lösungen sind.

Behauptung: Kein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten kann die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Betrachten wir dazu ein regelmäßiges Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten, deren Eckpunkte entweder mit Grün oder mit Rot markiert sind.

1. Feststellung: Das Vieleck hat zwei benachbarte Eckpunkte, die dieselbe Farbe haben. Begründung: Wenn sich Grün und Rot überall abwechselten, müsste das Vieleck eine gerade Anzahl von Eckpunkten haben. Veranschaulichung an einem Beispiel: G-R-G-R-G-R-G-R-G-R-G-R.

Die zwei Eckpunkte aus der 1. Feststellung seien A und B (z. B. beide rot, siehe Figur 3).



Figur 3

Beachte: Figur 3 kann ein Fünfeck sein, aber auch ein anderes regelmäßiges Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Eckpunkten.

Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: Mindestens einer der benachbarten Eckpunkte C und D ist ebenfalls rot. Dann gäbe es aber ein gleichschenkliges einfarbiges Dreieck (z. B. wenn C rot wäre, wäre das Dreieck ABC gleichschenkelig). Dies geht aber nicht.

2. Fall: Beide Eckpunkte C und D sind grün.

2. Feststellung: Die Mittelsenkrechte der Seite AB geht durch einen Eckpunkt X des Vielecks. Begründung: Die Mittelsenkrechte ist gleichzeitig auch eine Symmetrieachse des Vielecks. Wenn X rot ist, dann ist das einfarbige Dreieck ABX gleichschenkelig. Wenn X grün ist, dann ist das Dreieck CDX gleichschenkelig. Dies geht aber nicht.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Da **5**, **7** und **9** ungerade Zahlen sind, stellen sie somit keine Lösungen dar.

Die richtige(n) Antwort(en): B, D

6. Andreas notiert einige verschiedene ganze Zahlen, so dass es darunter vier Zahlen mit den folgenden Eigenschaften gibt:

I. Der Durchschnitt dieser vier Zahlen ist gleich mit dem Durchschnitt aus zwei der notierten Zahlen *und* II. Der Durchschnitt dieser vier Zahlen ist gleich mit dem Durchschnitt aus drei der notierten Zahlen.

Die Frage: Wie viele Zahlen konnte Andreas insgesamt notiert haben?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **5** eine Lösung ist. Tatsächlich: Die fünf Zahlen seien 1, 2, 3, 4, 5. Davon wählen wir diese vier aus: 1, 2, 4, 5. Die zwei Zahlen seien 2, 4 und die drei Zahlen seien 2, 3, 4. Es gilt:

$$\frac{2+4}{2} = \frac{2+3+4}{3} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3. \text{ Beide Eigenschaften sind erfüllt.}$$

In **Teil 2** begründen wir, dass **6, 7 und 8** ebenfalls Lösungen sind. Dazu reicht es, wenn wir zu den fünf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 eine, zwei oder drei weitere beliebige ganze Zahlen hinzufügen. Denn die Begründung

$$\frac{2+4}{2} = \frac{2+3+4}{3} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3 \text{ aus Teil 1 bleibt weiterhin gültig.}$$

In **Teil 3** zeigen wir, dass 4 keine Lösung ist. Dazu untersuchen wir, was es bedeutete, wenn 4 doch eine Lösung wäre. Die vier Zahlen seien a, b, c und d . Es seien a, b die zwei Zahlen, die I. erfüllen. Dann gilt:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} \Leftrightarrow 4(a+b) = 2(a+b+c+d). \text{ Vereinfachungen ergeben } 4a+4b = 2a+2b+2c+2d \text{ oder } a+b = c+d. \quad (*)$$

Bei den drei Zahlen, die II. erfüllen, müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden: a und b gehören beide zu den drei Zahlen (1. Fall) oder nur eine der Zahlen a oder b gehört zu den drei Zahlen (2. Fall).

$$\underline{1. \text{ Fall:}} \quad \frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow 3(a+b) = 2(a+b+c). \text{ Es folgt } a+b = 2c.$$

Mit Hilfe von (*) erhalten wir $2c = c + d$, also $c = d$. Dies geht jedoch nicht, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen. Dies bedeutet, dass der 1. Fall keine Lösung liefert.

$$\underline{2. \text{ Fall:}} \quad \frac{a+b}{2} = \frac{a+c+d}{3} \Leftrightarrow 3(a+b) = 2(a+c+d). \text{ Daraus folgt } a+3b = 2c+2d \text{ oder } a+3b = 2(c+d). \text{ Mit Hilfe von (*) erhalten wir } a+3b = 2(a+b) \text{ oder } a+3b = 2a+2b, \text{ also } b = a. \text{ Dies geht jedoch ebenfalls nicht, da alle Zahlen unterschiedlich sein müssen. Dies bedeutet, dass der 2. Fall auch keine Lösung liefert. Damit ist bewiesen, dass 4 keine Lösung darstellt.}$$

Beachte: Würde man aus a, b, c, d die zwei bzw. drei Zahlen anders wählen, hätte man ganz analoge Rechenwege (Rollenwechsel der Buchstaben).

Anregung: Der geneigte Leser möge eine solche Möglichkeit prüfen.

Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

7. In einem Stall gibt es Flöhe und Wanzen. Wenn die Anzahl der Flöhe das n -fache der tatsächlichen Anzahl der Flöhe betrüge, gäbe es insgesamt 2017 Tiere (Flöhe und Wanzen zusammengerechnet). Wenn hingegen die Anzahl der Wanzen das n -fache der tatsächlichen Anzahl der Wanzen betrüge, gäbe es insgesamt 2018 Tiere (Flöhe und Wanzen zusammengerechnet).

Die Frage: Wie viele Flöhe und Wanzen können insgesamt im Stall sein?

Bemerkung: n ist eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist.

- (A) 1001 (B) 1345 (C) 1454 (D) 1514 (E) 1696

Lösung: In Teil 1 führen wir Bezeichnungen ein und formulieren einige Feststellungen. Es sei x die Anzahl der Flöhe, y die Anzahl der Wanzen. Laut Aufgabentext gilt:

1. Feststellung: $n \cdot x + y = 2017$ I.

2. Feststellung: $x + n \cdot y = 2018$ II.

3. Feststellung: $y > x$. Begründung: Dies liegt daran, dass in II. 2018 größer ist als 2017 in I.

In Teil 2 ermitteln wir n , x und y . II. – I. ergibt: $x - n \cdot x + n \cdot y - y = 1$, oder $x \cdot (1 - n) + y \cdot (n - 1) = 1$ oder noch $(n - 1) \cdot (y - x) = 1$ (*)

4. Feststellung: Bei (*) muss $n - 1 = 1$ und $y - x = 1$ sein. Begründung: $y - x$ und $n - 1$ sind natürliche Zahlen und nur $1 \cdot 1$ ergibt 1.

Aus der 4. Feststellung folgt $n = 2$ und $y = x + 1$. Eingesetzt in I. erhalten wir

$2x + x + 1 = 2017$. Somit ist $x = \frac{2016}{3} = 672$. Aus $y = x + 1$ folgt $y = 673$.

Wir zählen noch zusammen: $x + y = 1345$.

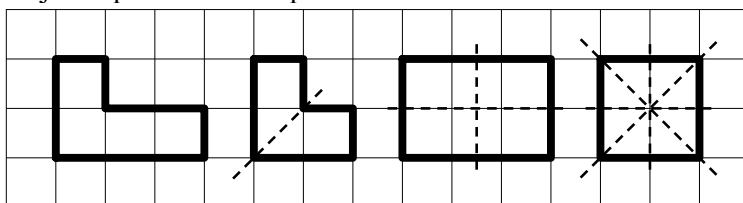
Bemerkung: Nach $n = 2$ hätten wir I. und II. addieren können. Es folgte: $3x + 3y = 4045$ oder $x + y = 1345$. Wir hätten damit das Ergebnis erhalten, ohne x und y berechnen zu müssen. Es bliebe jedoch noch zu prüfen, ob alle Bedingungen erfüllt sind.

Die richtige(n) Antwort(en): B

8. Auf kariertem Papier hat jemand ein Vieleck gezeichnet, dessen Seiten alle entlang der Linien verlaufen. Wie viele Symmetrieachsen kann ein solches Vieleck insgesamt haben?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: In Teil 1 zeigen wir, dass 0, 1, 2 und 4 Lösungen darstellen. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an.



0 Symmetrieachsen 1 Achse 2 Achsen 4 Achsen

In **Teil 2** zeigen wir, dass 3 keine Lösung darstellt. Alle Seiten des Vielecks sind waagrecht oder senkrecht. Daraus folgt:

1. Feststellung: Durch eine Spiegelung an einer Spiegelachse bleiben alle Seiten des Vielecks waagrecht oder senkrecht.

Dies bedeutet:

2. Feststellung: Eine Spiegelachse ist entweder waagrecht oder senkrecht oder schließt mit diesen Richtungen einen 45° -Winkel ein.

3. Feststellung: Wird eine Spiegelachse an einer anderen Spiegelachse gespiegelt, so ist das Spiegelbild selbst eine Spiegelachse. Dies liegt daran, dass durch Spiegelung an einer Spiegelachse das Spiegelbild des Vielecks wieder das Ausgangsvieleck ergibt.

Anregung: Der geneigte Leser möge diese Feststellung an den Figuren mit 2 und 4 Achsen aus Teil 1 prüfen.

4. Feststellung: Kein Vieleck kann zwei parallele Spiegelachsen besitzen. Begründung: Wenn es so wäre, erhielten wir durch wiederholte Spiegelungen an diesen Achsen weitere Spiegelachsen (sogar unendlich viele).

5. Feststellung: Wenn ein Vieleck mehr als eine Symmetrieachse hat und es keine zwei davon gibt, die 45° einschließen, dann hat das Vieleck genau 2 Symmetrieachsen. Dieses Phänomen kann man am Rechteck mit den 2 Symmetrieachsen aus Teil 1 nachvollziehen.

6. Feststellung: Wenn ein Vieleck mehr als eine Symmetrieachse hat und es gibt zwei davon, die 45° einschließen, dann hat das Vieleck 4 Symmetrieachsen. Dieses Phänomen kann man am Quadrat mit den 4 Achsen aus Teil 1 nachvollziehen.

7. Feststellung: Bei 4 Symmetrieachsen (die stets durch einen gemeinsamen Punkt gehen) schließen zwei benachbarte Achsen einen 45° Winkel ein und $4 \cdot 45^\circ = 180^\circ$.

8. Feststellung: Bei 2 Symmetrieachsen schließen diese lauter 90° Winkel ein und $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Analog zur 7. und 8. Feststellung folgt:

Wenn ein Vieleck genau 3 Symmetrieachsen hätte, dann müssten zwei davon einen 60° Winkel einschließen ($3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$). Aus der 5. und 6. Feststellung folgt, dass dies jedoch nicht möglich ist. Daher ist 3 keine Lösung.

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, E

9. Es gilt $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}$. Welchen Wert kann der Term $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ annehmen?

Bemerkung: a , b und c sind reelle Zahlen, alle Nenner sind ungleich Null.

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 4 (E) 8

Lösung: In **Teil 1** führen wir eine Bezeichnung ein und arbeiten mit mehreren Umformungen.

Es sei $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c} = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Dann gilt:
$$\begin{cases} b+c-a = ax \\ a+c-b = bx \\ a+b-c = cx \end{cases}$$

Wir addieren nun die letzten drei Gleichungen. Wir erhalten $a+b+c = (a+b+c)x$, oder $(a+b+c)(x-1) = 0$. Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Möglichkeiten:

$a+b+c = 0$ oder $x = 1$. (*)

In **Teil 2** beantworten wir mit Hilfe von (*) die eigentliche Frage.

Wenn $a+b+c = 0$, dann $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1$.

Wenn $x = 1$, dann $\begin{cases} b+c = 2a \\ a+c = 2b \\ a+b = 2c \end{cases}$, also $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2c \cdot 2a \cdot 2b}{abc} = 8$.

Die richtige(n) Antwort(en): B, E

10. Es gilt: $(a+b)(a+b+c) = 5$, $(b+c)(b+c+a) = 6$, $(c+a)(c+a+b) = 7$.
Welchen Wert kann der Term $(a+b+c)^2$ annehmen?
(A) 4 (B) 9 (C) 16 (D) 18 (E) 25

Lösung: In **Teil 1** ermitteln wir, welcher Wert für $(a+b+c)^2$ in Frage kommt. Zunächst zählen wir die drei Voraussetzungen auf:

I. $(a+b)(a+b+c) = 5$

II. $(b+c)(b+c+a) = 6$

III. $(c+a)(c+a+b) = 7$.

Wir addieren nun die Gleichungen I., II. und III. Auf der linken Seite entsteht:

$(a+b)(a+b+c) + (b+c)(b+c+a) + (c+a)(c+a+b)$

oder, wenn wir $(a+b+c)$ ausklammern und weiter umformen:

$(a+b+c) \cdot [(a+b) + (b+c) + (c+a)] = (a+b+c) \cdot (2a+2b+2c)$

$= (a+b+c) \cdot 2 \cdot (a+b+c) = 2 \cdot (a+b+c)^2$ (*)

Auf der rechten Seite entsteht $5+6+7 = 18$ (**)

Aus (*) und (**) folgt $(a+b+c)^2 = 9$

In **Teil 2** zeigen wir, dass der Wert **9** aus Teil 1 auch zu Stande kommen kann.

Tatsächlich, $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$ und $c = \frac{4}{3}$ erfüllt I, II, III und $\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)^2 = 9$.

Anregung: Der geneigte Leser möge I, II und III prüfen.

Die richtige(n) Antwort(en): B

11. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt für alle reellen Zahlen x und y die Bedingung $f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy$. Außerdem gilt: $f(0,25) = 2$.

Die Frage: Welche Eigenschaft trifft auf den Funktionswert $f(1)$ zu? Er ist

- (A) kleiner als 10 (B) kleiner als 20 (C) kleiner als 30
 (D) größer als 30 (E) größer als 40

Lösung: In Teil 1 ermitteln wir $f(0,5)$.

$$f(0,5) = f(0,25 + 0,25) = f(0,25) + f(0,25) + 80 \cdot 0,25 \cdot 0,25 = 2 + 2 + 5 = 9.$$

In Teil 2 berechnen wir $f(1)$. Dazu wenden wir auch $f(0,5) = 9$ an.

$$f(1) = f(0,5 + 0,5) = f(0,5) + f(0,5) + 80 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 9 + 9 + 20 = 38.$$

In Teil 3 deuten wir das Ergebnis. 38 ist größer als 30. Die vier anderen Aussagen treffen nicht zu.

Die richtige(n) Antwort(en): D

12. Die Felder eines 5×5 Brettes werden mit den Zahlen von 1 bis 25 belegt. In jedes Feld kommt genau eine Zahl und jede der Zahlen wird genau einmal verwendet. Unter *Abstand* zweier Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt verstehen wir die positive Differenz der zwei Zahlen, die in diesen Feldern stehen. Unter *Durchmesser* des Brettes verstehen wir den größten aller dieser Abstände.

Die Frage: Was kann der Durchmesser des Brettes sein?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: In Teil 1 zeigen wir, dass 6, 7, 8 und 9 Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Durchmesser 6

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
23	22	21	24	25

Durchmesser 7

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
24	22	23	21	25

Durchmesser 8

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
25	22	23	24	21

Durchmesser 9

Die schraffierten Felder zeigen, wie der Durchmesser zu Stande kommt.

In Teil 2 zeigen wir, dass 5 keine Lösung ist. Betrachten wir dazu ein mit den Zahlen 1 bis 25 belegtes 5×5 Brett.

1. Feststellung: Wenn wir bei dem Feld mit der Zahl 1 starten und uns stets auf benachbarte Felder (Felder mit mindestens einem gemeinsamen Eckpunkt) fortbewegen, können wir in höchstens 4 Schritten das Feld mit der Zahl 25 erreichen.

Anregung: Der geneigte Leser möge dies an einigen Beispielen aus Teil 1 selbst prüfen.

2. Feststellung: Die Summe der Abstände jedes denkbaren Weges aus der 1. Feststellung beträgt mindestens 24 ($25 - 1$, die Differenzen sind positiv).

3. Feststellung: Es muss bei jedem Weg aus der 1. Feststellung mindestens einen Schritt geben, bei dem der Abstand mindestens 6 beträgt. Begründung: Ansonsten wäre die Summe der vier Abstände höchstens $4 \cdot 5 = 20$, was aber wegen der 2. Feststellung nicht geht.

Aus der 3. Feststellung folgt, dass der Durchmesser des Brettes mindestens 6 beträgt. Dies bedeutet, dass 5 keine Lösung ist.

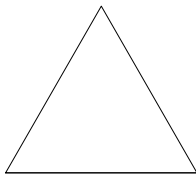
Die richtige(n) Antwort(en): B, C, D, E

13. Gegeben ist ein Dreieck ABC (zeichnerisch). Daniel möchte im Äußeren des Dreiecks auf alle denkbaren Arten weitere Dreiecke zeichnen, so dass gilt: Das Ausgangsdreieck und ein weiteres Dreieck bilden zusammen ein gleichschenkeliges Dreieck. Wie viele weitere unterschiedliche Dreiecke kann Daniel insgesamt zeichnen?

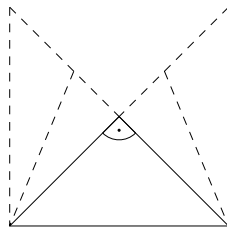
Bemerkung: Zwei Dreiecke gelten dann als unterschiedlich, wenn ihre Lagen unterschiedlich sind.

- (A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 9

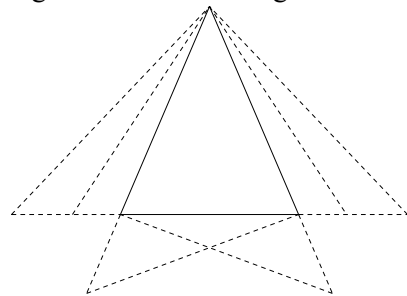
Lösung: Alle fünf Antworten stellen Lösungen dar. Wir schildern dies an passenden Beispielen. Das Ausgangsdreieck wurde mit durchgezogener Linie gezeichnet, die anderen Dreiecke wurden mit gestrichelten Linien gezeichnet.



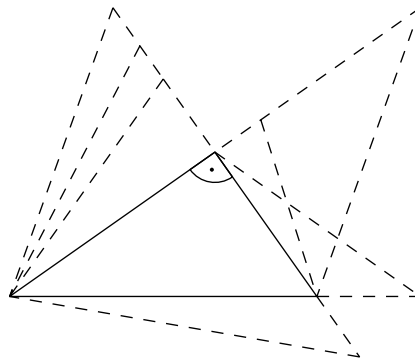
0 Dreiecke



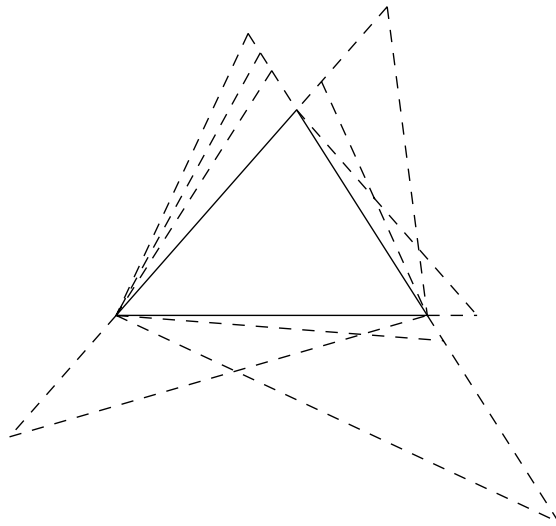
4 Dreiecke



6 Dreiecke



7 Dreiecke



9 Dreiecke

Die richtige(n) Antwort(en): A, B, C, D, E

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Im Dreieck ABC ist der Innenwinkel bei A 90° und der Innenwinkel bei B 35° . F ist der Mittelpunkt der Strecke BC , der Spiegelpunkt von C an AF (Achsen Spiegelung) sei T . Ermittle die Winkelweite des Winkels $\sphericalangle ATB$!

Lösung: Der Innenwinkel bei C beträgt $180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$ (1 Punkt).

Das Dreieck ABC ist die Hälfte eines Rechtecks, F ist der Schnittpunkt der zwei Diagonalen. Daraus folgt: $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FC}$ (2 Punkte). Die Dreiecke FAC und FAB sind beide gleichschenkelig. Dies bedeutet: $\sphericalangle CAF = 55^\circ$ und $\sphericalangle BAF = 35^\circ$ (1 Punkt).

Ferner gilt: $\sphericalangle AFC = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$

(1 Punkt). Wegen der Spiegelung ist

$\sphericalangle FAT = \sphericalangle FAC$ (1 Punkt), und somit

$\sphericalangle FAT = 55^\circ$. Daraus folgt nun: $\sphericalangle BAT = \sphericalangle FAT - \sphericalangle FAB = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$

(2 Punkte), und $\overline{FT} = \overline{FC}$. Dadurch erhalten wir $\overline{FT} = \overline{FA} = \overline{FB}$ (1 Punkt).

Die Dreiecke FTA und FTB sind gleichschenkelig, daher $\sphericalangle ATF = \sphericalangle TAF = 55^\circ$ bzw. $\sphericalangle TFA = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$ (2 Punkte).

$\sphericalangle TFB = 180^\circ - (\sphericalangle TFA + \sphericalangle AFC) = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$ (2 Punkte) und

somit $\sphericalangle FTB = (180^\circ - \sphericalangle TFB) : 2 = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$ (1 Punkt) bzw.

$\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATF + \sphericalangle FTB = 55^\circ + 70^\circ = 125^\circ$ (2 Punkte). (Insgesamt maximal 16 Punkte.)

