„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2016

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 10

13. Wie viele verschiedene Rechtecke können insgesamt in ein 8×8 Gitternetz eingezeichnet werden, wenn alle Rechteckseiten entlang von Gitternetzlinien verlaufen?

(A) *204* **(B)** *512* **(C)** *784* **(D)** *1296* **(E)** *3240*

Lösung: Vorbemerkung: Bei einem Rechteck *a*×*b* ist *a* stets die Länge, *b* die Breite.

In **Teil 1** bestimmen wir die Anzahl von allen Rechtecken mit der Breite 1.

Art des Rechtecks	Anzahl solcher Rechtecke
1×1	$8\cdot 8$
2×1	$7\cdot 8$
3×1	$6\cdot 8$
4×1	$5\cdot 8$
5×1	$4\cdot 8$
6×1	$3\cdot 8$
7×1	$2\cdot 8$
8×1	$1\cdot 8$

Insgesamt gibt es $(8+7+6+...+1)\cdot 8 \;=\; 36\cdot 8$ solche Rechtecke.

In **Teil 2** bestimmen wir die Anzahl von allen Rechtecken mit der Breite 2.

Art des Rechtecks	Anzahl solcher Rechtecke
1×2	$8\cdot 7$
2×2	$7\cdot 7$
3×2	$6\cdot 7$
4×2	$5\cdot 7$
5×2	$4\cdot 7$
6×2	$3\cdot 7$
7×2	$2\cdot 7$
8×2	$1\cdot 7$

Insgesamt gibt es $(8+7+6+...+1)\cdot 7 = 36\cdot 7$ solche Rechtecke.

In **Teil 3** wenden wir die Regelmäßigkeiten aus Teil 1 und 2 ohne weiteren Beweis an um die Anzahl der restlichen Rechtecke zu erhalten. Es gibt $36\cdot 6$ Rechtecke mit der Breite 3, $36\cdot 5$ mit der Breite 4, $36\cdot 4$ mit der Breite 5, $36\cdot 3$ mit der Breite 6, $36\cdot 2$ mit der Breite 7, $36\cdot 1$ mit der Breite 8.

In **Teil 4** ermitteln wir die gesuchte Gesamtanzahl der Rechtecke.

$36 \cdot 8\ +\ 36 \cdot 7\ +\ \ldots\ 36 \cdot 1\ =\ 36 \cdot (8 + 7 + ... + 1) = 36 \cdot 36 = \mathbf{1296}$

Alternativlösung: Stellen wir uns vor, dass wir die Seiten *eines* bestimmten Rechtecks zu Geraden verlängern. Die beiden waagerechten Geraden bilden dann einen waagerechten Streifen und die beiden senkrechten Geraden einen senkrechten Streifen. Es gilt aber auch umgekehrt: Ein waagerechter und ein senkrechter Streifen bestimmen ein Rechteck – und zwar eindeutig. Damit haben wir einen *neuen Lösungsansatz*: Wir ermitteln, auf insgesamt wie viele Arten wir einen waagerechten *und* einen senkrechten Streifen bestimmen können. Das 8×8 Gitternetz hat 9 waagerechte und 9 senkrechte Linien. Ein Streifen wird durch genau 2 Linien bestimmt. Aus 9 waagerechten Linien können wir zwei auf $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ Arten (mit Kombinatorik: $\binom{9}{2}$ = 36) auswählen. 2 senkrechte Linien aus 9 können wir ebenso auf 36 Arten auswählen. Jeder waagerechte Streifen kann mit jedem senkrechten Streifen kombiniert werden. Insgesamt gibt es $36 \cdot 36 = \mathbf{1296}$ Rechtecke.

(A) 16% **(B)** 34% **(C)** 12% **(D) 30%** **(E)** 10%