„Blick ins Buch"
Bolyai Teamwettbewerb 2017

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

Klasse 12

9. Eine Zahlenreihe von reellen Zahlen hat folgende Eigenschaften: 1. Die Summe von 7 beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen ist negativ *und* 2. Die Summe von 11 beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen ist positiv. Wie viele Zahlen kann eine solche Zahlenreihe insgesamt enthalten?
Lösungshinweis: Die Frage bezieht sich nur auf die aufgeführten Zahlen.

(A) *13* **(B)** *16* **(C)** *18* **(D)** *2017* **(E)** *Keine dieser Antworten.*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **13** eine Lösung ist. Dazu geben wir ein Beispiel an: $8; 8; -21; 8; 8; 8; -21; 8; 8; -21; 8; 8; 8$

In **Teil 2** zeigen wir, dass **16** eine Lösung ist. Dazu geben wir ein Beispiel an: $8; 8; -21; 8; 8; 8; -21; 8; 8; -21; 8; 8; 8; -21; 8; 8$

In **Teil 3** zeigen wir zunächst folgende Behauptung:

Behauptung: Eine solche Zahlenreihe kann nicht aus 17 Zahlen bestehen.

Beweis: Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn es doch 17 solche Zahlen gäbe, die wir mit $a_1, a_2, ..., a_{17}$ bezeichnen. Dazu bilden wir aus diesen Zahlen folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_9 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{17} \end{array}$$

1. Feststellung: In jeder Reihe der Tabelle kommen 7 aufeinanderfolgende Zahlen der Zahlenreihe vor.

Aus der Bedingung und aus der 1. Feststellung folgt:

2. Feststellung: Die Summe der Zahlen ist in jeder Reihe negativ.

3. Feststellung: In jeder Spalte der Tabelle kommen 11 aufeinanderfolgende Zahlen der Zahlenreihe vor.

Aus der Bedingung und aus der 3. Feststellung folgt:

4. Feststellung: Die Summe der Zahlen ist in jeder Spalte positiv.

5. Feststellung: Die Tabelle enthält insgesamt 77 Zahlen ($7 \cdot 11$).

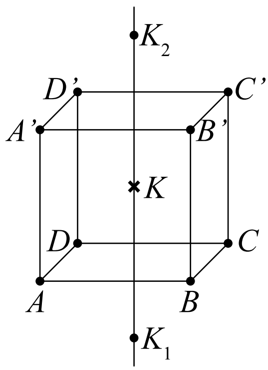
Wenn wir alle 77 Zahlen der Tabelle *reihenweise* addieren, erhalten wir laut 2. Feststellung ein *negatives* Ergebnis. Wenn wir jedoch alle 77 Zahlen der Tabelle *spaltenweise* addieren, erhalten wir laut 4. Feststellung ein *positives* Ergebnis. Wir haben aber beide Male *dieselben 77 Zahlen* addiert. Es kann

daher nicht sein, dass das Ergebnis einmal negativ und einmal positiv ausfällt. Damit ist bewiesen, dass 17 keine Lösung ist.
Folgerung: Eine solche Zahlenreihe kann nicht aus mehr als 17 Zahlen bestehen. *Begründung*: Eine Untersuchung der ersten 17 Zahlen der Zahlenreihe (wie beim Beweis der Behauptung) zeigt, dass dies nicht möglich ist.

(A) 36% **(B) 24%** **(C)** 23% **(D)** 20% **(E)** 30%

12. Man betrachtet Punkte im Raum, die folgende Bedingungen erfüllen:
1. Nicht alle Punkte liegen in derselben Ebene *und* 2. Für zwei beliebige Punkte *A*, *B* lassen sich zwei andere Punkte *C*, *D* finden, so dass die Geraden *AB* und *CD* parallel zueinander verlaufen (aber nicht identisch sind).
Die Frage: Wie viele solche Punkte kann es insgesamt geben?

(A) *10* **(B)** *14* **(C)** *22* **(D)** *27* **(E)** *30*



Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **10** eine Lösung ist. Dazu betrachten wir den Würfel *ABCDA'B'C'D'* (siehe die nebenstehende Figur). *K* ist der Mittelpunkt des Würfels, K_1, und K_2 die Spiegelpunkte von *K* bezogen auf *ABCD* bzw. *A'B'C'D'*.
Die Punkte *A, B, C, D, A', B', C', D',* K_1 und K_2 sind dann ein Beispiel für **10** Punkte. Die 1. Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Die 2. Bedingung ist ebenfalls erfüllt. Wir begründen dies aus Symmetriegründen nur stichprobenartig.
Beispiel 1: Wenn die ersten zwei Punkte *A* und *B* sind, dann sind die anderen zwei Punkte z. B. *C* und *D*.
Beispiel 2: Wenn die ersten zwei Punkte *B* und *D'* sind, dann sind die anderen zwei Punkte z. B. K_1 und *D*.
Beispiel 3: Wenn die ersten zwei Punkte *B'* und K_1 sind, dann sind die anderen zwei Punkte z. B. K_2 und *D*.
Anregung: Der geneigte Löser möge weitere Beispiele prüfen.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **14** eine Lösung ist. Dazu ersetzen wir in der Figur den Würfel durch ein regelmäßiges sechseckiges Prisma, dessen Mantellinien genauso lang sind wie die Seitenlängen der Grundflächen (*K*, K_1, und K_2 werden wie in Teil 1 konstruiert). Die 12 (6 + 6) Eckpunkte des Prismas bzw. K_1, und K_2 sind **14** Punkte (12 + 2), die beide Bedingungen erfüllen.
In **Teil 3** zeigen wir, dass **22** eine Lösung ist. Dazu gehen wir wie in Teil 2 vor, betrachten aber ein regelmäßiges zehneckiges Prisma, dessen Mantellinien genauso lang sind wie die Seitenlängen der Grundflächen.
In **Teil 4** zeigen wir, dass **30** eine Lösung ist. Dazu gehen wir wie in Teil 2 vor, betrachten wir aber ein regelmäßiges vierzehneckiges Prisma, dessen Mantellinien denauso lang sind wie die Seitenlängen der Grundflächen.

Anregung: Der geneigte Leser möge das Beispiel aus Teil 3 oder 4 prüfen.
In **Teil 5** zeigen wir, dass **27** eine Lösung ist. Dazu ersetzen wir in der Figur den Würfel durch sechs kongruente regelmäßige Sechsecke, die K_1K_2 als gemeinsame Diagonale haben. Insgesamt haben wir $6 \cdot 4 = 24$ von K_1 und K_2 verschiedene Eckpunkte. K_1 und K_2 kommen in jedem Sechseck vor und werden nur einmal gezählt und der Mittelpunkt K kommt ebenfalls noch dazu. Dies ergibt insgesamt $24 + 2 + 1 = \mathbf{27}$ Punkte, die die Bedingungen erfüllen.
Anregung: Der geneigte Leser möge das Beispiel aus Teil 5 prüfen.

(A) 29%	**(B) 24%**	**(C) 26%**	**(D) 24%**	**(E) 25%**