„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2018

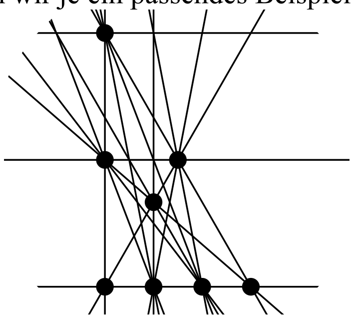
Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

7. Klasse / 7. Schulstufe

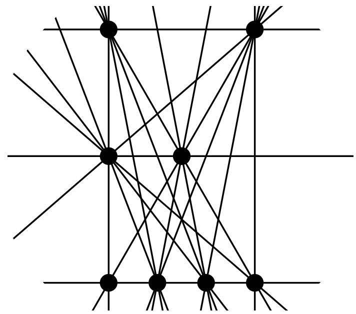
3. In der Ebene sind 8 (verschiedene) Punkte angegeben. 4 von ihnen liegen auf einer Geraden. Von den anderen vier Punkten (die nicht auf dieser Geraden liegen) gibt es keine drei, die auf einer Gerade liegen. Wie viele verschiedene Geraden gibt es insgesamt, die durch jeweils mindestens 2 der 8 Punkte verlaufen?

(A) *15* **(B)** *17* **(C)** *19* **(D)** *23* **(E)** *24*

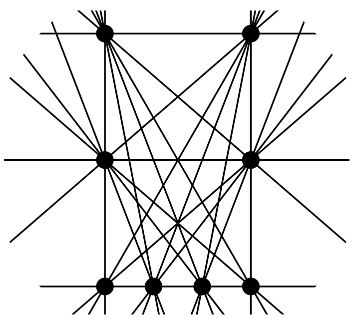
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **15**, **17**, **19** und **23** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:



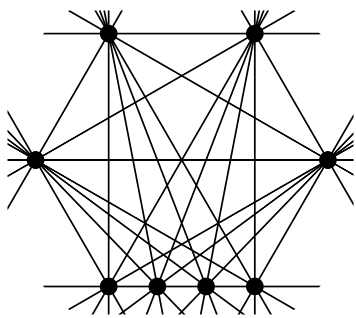
15 Geraden



17 Geraden



19 Geraden



23 Geraden

In **Teil 2** zeigen wir, dass 24 keine Lösung ist. Begründung: In jedem der Beispiele mit 15, 17 und 19 Geraden gibt es mindestens 3 Punkte, die auf einer Geraden liegen (neben den 4 Punkten, die nach Aufgabenstellung auf einer Geraden liegen). Solche Geraden werden aber nur *einmal* (und *nicht* dreimal) gezählt. Im Beispiel mit 23 Geraden hingegen liegen nur die 4 Punkte aus der

Aufgabenstellung auf einer Geraden. Jede weitere Verbindung zweier Punkte führt stets auf eine neue Gerade. Daher ist 23 die größte Anzahl von denkbaren Geraden. Da 24 größer als 23 ist, ist 24 nicht möglich.

Alternativlösung zu Teil 2: 2 Punkte bestimmen eine Gerade. Jeder der 8 Punkte kann mit 7 weiteren Punkten verbunden werden. Es entstehen damit $8 \cdot 7$ Geraden. Da so aber jede Gerade zweimal gezählt wird (z. B. *AB* und *BA*), müssen wir dieses Ergebnis noch durch 2 teilen: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

Es gibt also höchstens 28 Geraden durch 8 Punkte. Wir betrachten nun jene 4 Punkte, die nach Aufgabenstellung auf einer Geraden liegen. Für diese 4 Punkte würden nach dem obigen Gedankengang $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Geraden entstehen. In Wirklichkeit entsteht aber nur eine einzige Gerade, also 5 weniger (6 – 1). 28 – 5 = 23 ist somit die höchste Anzahl der Geraden. 24 ist daher nicht möglich.

(A) 15% **(B) 20%** **(C) 19%** **(D) 22%** **(E)** 18%

7. Jemand hat die Felder einer 3×3 Tabelle so mit natürlichen Zahlen gefüllt, dass die Summe zweier benachbarter Zahlen stets 3 ist. Wie viel kann die Summe der neun Zahlen der Tabelle betragen?

Bemerkung: Zwei Zahlen sind dann benachbart, wenn ihre Felder eine gemeinsame Seite besitzen.

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *14* **(D)** *15* **(E)** *16*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **12**, **13**, **14** und **15** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:

0	3	0
3	0	3
0	3	0

Summe **12**

1	2	1
2	1	2
1	2	1

Summe **13**

2	1	2
1	2	1
2	1	2

Summe **14**

3	0	3
0	3	0
3	0	3

Summe **15**

In **Teil 2** zeigen wir, dass 16 keine Lösung ist. Zunächst füllen wir lediglich zwei Felder aus (siehe *Figur 1*). Laut Bedingung gilt $a + b = 3$. Wir wenden nun die Bedingung für weitere benachbarte Felder an und erhalten der Reihe nach *Figur 2*, *Figur 3* und schließlich *Figur 4*.

a	b	

Figur 1

a	b	a
b	a	

Figur 2

a	b	a
b	a	b
a	b	

Figur 3

a	b	a
b	a	b
a	b	a

Figur 4

Wir berechnen nun die Summe der neun Zahlen aus *Figur 4*: $5a + 4b$. Aus $a + b = 3$ folgt $5a+4b=5a+4(3-a)=12+a$. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen, dass 16 keine Lösung ist. Begründung: $12 + a = 16$ bedeutet $a = 4$. Aus $a + b = 3$ folgt $4 + b = 3$, also $b = -1$. Dies geht aber nicht, da b eine natürliche Zahl sein muss.

(A) 31% **(B) 65%** **(C) 56%** **(D) 32%** **(E)** 2%