Erste schriftliche Wettbewerbsrunde

Die hinter den Lösungen stehenden Prozentzahlen zeigen, wie viel Prozent der Wettbewerbsteilnehmer die gegebene Lösung angekreuzt haben. Die richtigen Lösungen werden fettgeduckt und grau hinterlegt angegeben.

Klasse 8

1. Wie viel sind 5% des Vierfachen in diesem Satz geschriebenen Vokale?

(A) *3* **(B)** *mindestens 4* **(C)** *höchstens 8* **(D)** *20* **(E)** *80*

Lösung: Unterstreichen wir die Vokale im Satz: Wie viel sind 5% des Vierfachen in diesem Satz geschriebenen Vokale? Es gibt insgesamt 23 Vokale, das Vierfache davon ist $23 \cdot 4 = 92$ und dessen 5% $92 \cdot 0{,}05 = 4{,}6$, das mindestens 4 und höchstens 8 ist.

(A) 1% **(B) 97%** **(C) 73%** **(D)** 1% **(E)** 0%

2. Wie viel ist der Wert von x, wenn der folgende Zusammenhang besteht?

$$1001 - 999 : 999 - 997 : 997 - 995 : 995 - 993 : 993 - \ldots - x : x = 896$$

(A) *105* **(B)** *787* **(C)** *789* **(D)** *791* **(E)** *793*

Lösung: Wenn wir die Divisionen durchführen, sehen wir, dass bei jeder Subtraktion 1 subtrahiert wird. Da $1001 - 896 = 105$, müssen wir insgesamt 105-mal 1 subtrahieren. In der 1. Subtraktion kommt 999 vor, in der Zweiten 997 usw. immer eine um 2 kleinere Zahl. Da die 105. Subtraktion 104 Schritte später kommt, als die 1. Subtraktion, wird dort die Zahl $999 - 104 \cdot 2 = 791$ vorkommen. Der Wert von x ist also 791.

(A) 32% **(B)** 15% **(C)** 28% **(D) 50%** **(E)** 22%

3. Beim Knödelwettbewerb kamen drei Kinder: Ali, Pufi und Dubi ins Finale. Alle drei aßen mindestens einen Knödel während des Wettbewerbs. Ali und Pufi aßen zusammen zweimal so viele Knödel wie Dubi. Wer gewann den Wettbewerb, wenn die gemeinsame Leistung von Pufi und Dubi dreimal so groß war, wie die von Ali?

(A) *Ali* **(B)** *Dubi* **(C)** *Pufi*

(D) *Alle aßen gleich viel.* **(E)** *Nicht feststellbar.*

Lösung: Bezeichnen wir die Anzahl der Knödel, die von Ali, Pufi und Dubi gegessen wurde mit a, p und d, wo die Buchstaben für positive ganze Zahlen stehen. Wir wissen, dass $a + p = 2d$ und $p + d = 3a$ ist.

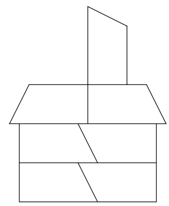
Aus der ersten Gleichung folgt, dass $d = \frac{a+p}{2}$ ist. Wenn wir diesen Zusammenhang in die zweite Gleichung schreiben, bekommen wir $p+\frac{a+p}{2}=3a$, was zu $1{,}5\cdot p=2{,}5\cdot a$ führt. So ist $a<p$ (da $\frac{a}{p}=\frac{1{,}5}{2{,}5}<1$).

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass $a=\frac{p+d}{3}$ ist. Wenn wir diesen Zusammenhang in die erste Gleichung schreiben, bekommen wir $\frac{p+d}{3}+p=2d$, was zu $\frac{4}{3}p=\frac{5}{3}d$ führt. So ist $4p=5d$ und dadurch $d<p$ (denn $\frac{d}{p}=\frac{4}{5}<1$).

Da sowohl $a<p$, als auch $d<p$ erfüllt ist, gewann Pufi den Wettbewerb.

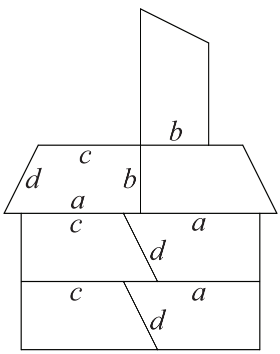
(A) 5% **(B)** 15% **(C) 69%** **(D)** 2% **(E)** 11%

4. Die Figur in der Abbildung besteht aus sieben gleichen Vierecken. Wie viel cm ist der Umfang dieser Figur, wenn der Umfang eines Vierecks 13cm ist?



(A) *20* **(B)** *26* **(C)** *39* **(D)** *42* **(E)** *65*

Lösung: Bezeichnen wir die Seiten des Vierecks wie in der Abbildung mit *a*, *b*, *c* und *d*. So ist $a+b+c+d=13$ cm. Den Umfang der Figur können wir berechnen, indem wir aus der Summe der Umfänge der sieben Vierecke die „inneren Strecken“, also die Strecken, wo sich zwei Vierecke berühren, subtrahieren. (alle „inneren Strecken“ müssen wir doppelt subtrahieren, da wir sie bei beiden Vierecken gerechnet haben).



Die Summe der Umfänge der sieben Vierecke ist $7\cdot 13=91$ cm. Daraus müssen wir die „inneren Strecken“ subtrahieren. Das oberste Viereck berührt das unter ihm liegende Viereck an Strecke b. In den unteren drei Stockwerken gibt es je 2 nebeneinanderliegende Vierecke. Die im dritten Stockwerk Liegenden berühren einander an Strecke b, und die in den unteren beiden Stockwerken Liegenden an Strecke d. Das zweite Stockwerk berührt sowohl das untere, als auch das obere an Strecke $a+c$. So sind die Berührungen insgesamt $2a+2b+2c+2d$ lang, jedoch wir müssen das Doppelte, also $4\cdot(a+b+c+d)=4\cdot 13=52$ cm aus 91cm subtrahieren. Der Umfang der Figur ist also $91-52=39$ cm lang.

(A) 2% **(B)** 7% **(C) 41%** **(D)** 31% **(E)** 17%

5. Wir verteilen eine Tüte Walnüsse unter drei Kindern. Das erste Kind bekommt die Hälfte der Walnüsse und eine halbe Walnuss, das zweite Kind die Hälfte der übriggebliebenen Walnüsse und noch eine halbe Walnuss und das dritte Kind die Hälfte der übriggebliebenen Walnüsse und noch eine halbe Walnuss. So bleiben am Ende 4 Walnüsse. Während des Verteilens mussten wir keine Walnüsse knacken. Wie viele Walnüsse waren ursprünglich in der Tüte?

(A) *19* **(B)** *24* **(C)** *48* **(D)** *79* **(E)** *Keine dieser Zahlen..*

Lösung: Denken wir rückwärts! Nachdem das dritte Kind eine halbe Walnuss bekam, blieben 4 Walnüsse. Davor gab es also 4,5 Walnüsse und das war die Hälfte der Anzahl der Walnüsse bevor wir dem dritten Kind Walnüsse gaben. Wir hatten also 9 Nüsse, von denen 5 das dritte Kind bekam und so musste keine Nuss geknackt werden.

Ähnlich können wir berechnen, dass wir $2\cdot(9+0{,}5)=19$ Walnüsse hatten, bevor wir dem zweiten Kind Nüsse verteilten (von denen es die Hälfte und noch eine Halbe, also $9{,}5+0{,}5=10$ ohne Knacken bekam).

So können wir auch berechnen, dass wir $2\cdot(19+0{,}5)=39$ Walnüsse hatten, bevor wir dem ersten Kind Nüsse gaben (von denen es die Hälfte und noch eine Halbe, also $19{,}5+0{,}5=20$ ohne Knacken bekam). In der Tüte gab es also ursprünglich 39 Walnüsse.

(A) 7% **(B)** 6% **(C)** 7% **(D)** 6% **(E) 75%**

6. In der Kantine wurde Kuchen gebacken, auf 4x4cm große Quadrate geschnitten und dann auf Tabletts gelegt. Zwischen den Kuchenstücken gab es eine Spalte von 1cm, damit sie nicht zusammenkleben. So passen 9 Stücke mit der Größe von 4x4cm auf ein kleineres quadratförmiges Tablett und an den Ränden des Tabletts bleibt kein Platz mehr. Das größere quadratförmige Tablett ist 6-mal so groß, wie das Kleinere. Wie viele Kuchenstücke können auf das größere Tablett gelegt werden, so dass es zwischen den Stücken eine Spalte von 1cm gibt und dass keine Stücke mehr auf das Tablett passen?

(A) *256* **(B)** *260* **(C)** *289* **(D)** *300* **(E)** *324*

Lösung: Da das kleine Tablett quadratförmig ist, liegen darauf die 9 Kuchenstücke in einer 3x3 Anordnung. An einer Seite des Tabletts gibt es zwischen den drei 4cm breiten Stücken 2-mal 1cm breite Spalten und dadurch ist diese Seite $3\cdot4+2\cdot1=14$ cm lang beim kleinen Tablett und $6\cdot14=84$ cm beim großen Tablett.

Wenn es an den Rändern des großen Tabletts auch keinen Platz mehr gibt und nebeneinander *n* Kuchenstücke liegen, dann ist die Seitenlänge (bei *n* Kuchen und *n-1* Spalten) $n\cdot4+(n-1)\cdot1=5n-1=84$ cm und daraus folgt, dass $n=17$ ist. Auf das größere Tablett passen also $17\cdot17=289$ Stücke in dieser Anordnung. So ist Antwort (C) richtig, doch Antworten (D) und (E) sind nicht möglich.

Mit der Verminderung der Anzahl der Stücke sind auch Antworten (A) und (B) zu verwirklichen. Wenn wir die Stücke in eine 16x16 Anordnung in die

Mitte des Tabletts legen (mit den 1cm breiten Spalten dazwischen), ist die Gesamtlänge der Kuchenstücken $16 \cdot 4 + 15 \cdot 1 = 79\,\text{cm}$. An den Ränden bleiben so $(84 - 79) : 2 = 2{,}5\,\text{cm}$ breite Spalten, aber dorthin passen keine Stücke mehr. 256 Stücke können also auch so auf das Tablett gelegt werden, dass die Bedingungen erfüllt bleiben.
Wenn wir bei der 16x16 Anordnung in 4 Reihen die Anzahl der Stücke von 16 auf 17 vermehren (so bleibt in diesen Reihen kein Platz mehr bei dem rechten und linken Rand), passen $256 + 4 = 260$ Kuchenstücke auf das Tablett und mehr nicht.

(A) 19% **(B) 11%** **(C) 33%** **(D)** 9% **(E)** 33%

7. Der größte gemeinsame Teiler von drei natürlichen Zahlen ist 6 und ihr kleinstes gemeinsames Vielfache 120. Wie viel kann die Summe der drei Zahlen sein?

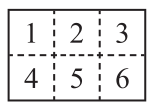
(A) *30* **(B)** *60* **(C)** *66* **(D)** *176* **(E)** *246*

Lösung: Wenn alle drei Zahlen durch 6 teilbar sind, dann ist auch ihre Summe durch 6 teilbar, also kann 176 keine Lösung sein, da sie nicht durch 6 teilbar ist. Wenn der kleinste gemeinsame Vielfache 120 ist, dann muss mindestens eine Zahl durch 5 teilbar sein. Wenn eine Zahl sowohl durch 5, als auch durch 6 teilbar ist, ist sie durch 30 teilbar. Die Summe kann also nicht 30 sein, da die eine Zahl mindestens 30 ist (und wenn diese Zahl genau 30 ist, müssen die beiden Anderen 0 sein, aber so sind die Bedingungen nicht erfüllt). Also sind Antworten (A) und (D) falsch.

Die anderen drei Antworten sind möglich:
– die drei Zahlen sind 6, 24 und 30, ihre Summe 60
– die drei Zahlen sind 12, 24 und 30, ihre Summe 66
– die drei Zahlen sind 6, 120 und 120, ihre Summe 246
In allen drei Fällen ist der größte gemeinsame Teiler 6 und das kleinste gemeinsame Vielfache 120, die Lösungen sind also richtig.

(A) 18% **(B) 53%** **(C) 41%** **(D)** 13% **(E) 23%**

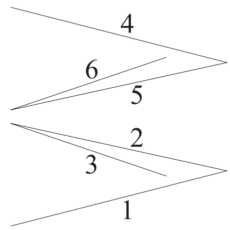
8. Das aus sechs gleichgroßen Quadraten bestehende Papierstück falten wir an den gestrichelten Linien (siehe Abbildung) in ein Quadrat zusammen und legen es auf den Tisch. In welcher Reihenfolge vom Tisch angefangen können so die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 übereinanderstehen?



(A) *1-2-3-5-4-6* **(B)** *1-3-2-5-6-4* **(C)** *4-1-6-3-2-5*

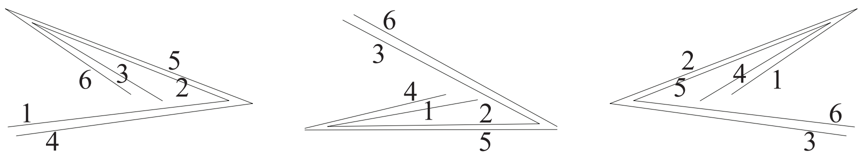
(D) *5-2-1-4-3-6* **(E)** *3-6-1-4-5-2*

Lösung: Antwort (A) ist nicht möglich, weil hier die Zahlen 3 und 5 hintereinander stehen. Da sie einander nur an einer Ecke berühren, kommt bei jedem Falten mindestens eine 2 oder 6 dazwischen. Die anderen vier Antworten sind aber möglich. Die Seitenansichten zeigen das Falten, bei dem



die Zahlen über den Strecken auf den entsprechenden Quadraten liegen
Bei Antwort (B) falten wir zuerst die Spalte mit 3 und 6 in die Mitte, darauf kommt die Spalte mit 1 und 4, und schließlich falten wir den oberen Teil darauf (siehe Abbildung rechts). 1-3-2-5-6-4

Bei Antwort (C) falten wir zuerst die obere Reihe auf die untere, dann die rechte Spalte auf die mittlere und schließlich die auf die linke Spalte. Bei Antwort (D) falten wir die obere Reihe wieder auf die Untere, dann erst die linke und dann die rechte Spalte auf die mittlere. Antwort (E) ist die Spiegelung von (C): zuerst falten wir die untere Reihe auf die obere, dann die linke Spalte auf die mittlere und dann diese auf die rechte. Die drei Querschnitte sind in der folgenden Abbildung zu sehen:



4-1-6-3-2-5   5-2-1-4-3-6   3-6-1-4-5-2

(A) 10%   **(B) 48%**   **(C) 57%**   **(D) 74%**   **(E) 56%**

9. Bertha fährt mit einem Fahrrad zu ihrer Oma. Sie rechnete aus, dass sie mit einer Geschwindigkeit von 10 km pro Stunde Nachmittag um 1 an kommt, aber mit einer Geschwindigkeit von 15 km pro Stunde schon um 11 Uhr ankommen würde. Wie viel km sollte sie in einer Stunde fahren, wenn sie genau am Mittag ankommen möchte?

(A) *12*   **(B)** *weniger, als 12,5*   **(C)** *12,5*   **(D)** *mehr, als 12,5*   **(E)** *14*

Lösung: Wenn Bertha im ersten Fall t Stunden fährt, dann wohnt ihre Oma nach dem Zusammenhang $s = v \cdot t$ in einer Entfernung von $10 \cdot t$ km. Im zweiten Fall kommt sie statt 13 schon um 11 Uhr an, sie ist also nur $t-2$ Stunden unterwegs und legt $15 \cdot (t-2)$ km zurück. Da die Entfernungen in beiden Fällen gleich sind, gilt: $10 \cdot t = 15 \cdot (t-2)$, also $10t = 15t - 30$ und somit $t = 6$ Stunden. Bertha fährt also um $13 - 6 = 7$ Uhr los und die Entfernung beträgt 60km. Wenn Bertha am Mittag ankommen möchte, muss sie $12 - 7 = 5$ Stunden unterwegs sein und dazu braucht sie eine Geschwindigkeit von $60 : 5 = 12$ km pro Stunde (was also weniger, als 12,5 ist).

(A) 18%   **(B) 15%**   **(C)** 75%   **(D)** 5%   **(E)** 2%

10. Der Basis gegenüberliegender Winkel in einem gleichschenkligen Dreieck ist 20°, die Basis *a* und der Schenkel *b*. Welche der folgenden Behauptungen stimmen bei diesem Dreieck?

(A) $a < \frac{1}{2}b$ **(B)** $a > \frac{1}{2}b$ **(C)** $a \le \frac{3}{5}b$ **(D)** $a = \frac{3}{5}b$ **(E)** $a \ge \frac{3}{5}b$

Lösung: Sei die Basis *BC*, dann ist Winkel *CAB* 20°, und die auf der Basis liegenden Winkel *ABC* und *BCA* $(180° - 20°) : 2 = 80°$. Nehmen wir den Punkt *D* auf dem Schenkel *AB* so, dass der Winkel *BCD* 50° ist.
So ist im Dreieck *BCD* der Winkel an der Ecke *D* $180° - (80° + 50°) = 50°$ und das Dreieck ist deshalb gleichschenklig, also $BD = BC = a$ und $AD = b - a$.

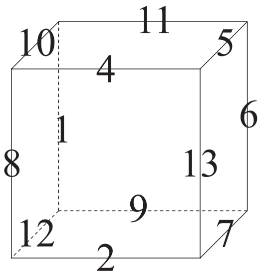
Im Dreieck liegt dem kleineren Winkel die kleinere Seite und dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber. Da Winkel *BCD* < Winkel *DBC*, ist $BD < DC$ und wegen Winkel *DAC* < Winkel *ACD*, ist $DC < AD$, also $BD < AD$ und so $a < b - a$. Daraus folgt, dass $2a < b$, also $a < \frac{1}{2}b$ und so ist natürlich auch $a \le \frac{3}{5}b$ richtig.

(A) 58% **(B)** 28% **(C) 48%** **(D)** 17% **(E)** 18%

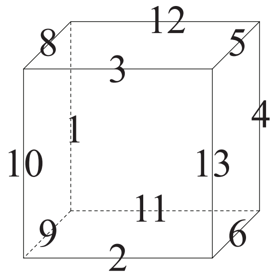
11. Die Kanten eines Würfels kann man mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 nicht so beschriften, dass die Summen der auf den aus einer Ecke ausgehenden drei Kanten liegenden Zahlen immer gleich sind. Welche der zwölf Zahlen sollen wir mit der Zahl 13 tauschen, damit die gewünschte Beschriftung möglich wird?

(A) *3* **(B)** *5* **(C)** *7* **(D)** *9* **(E)** *11*

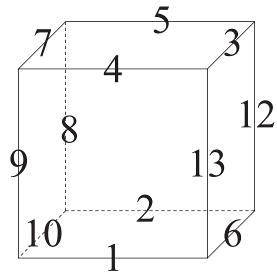
Lösung: Schreiben wir in Gedanken auf alle Ecken die Summen der Zahlen, die auf den aus der Ecke ausgehenden Kanten liegen. Wir möchten, dass so auf allen Ecken die gleiche Zahl *n* steht. Addieren wir die auf den acht Ecken liegenden Zahlen. Dabei rechnen wir alle Kanten doppelt (aus ihren beiden Endpunkten). So ist die Summe der acht Zahlen, also $8n$ gleich dem Doppelten der Summe, der auf den Kanten liegenden zwölf Zahlen. Daraus folgt, dass die Summe der zwölf Zahlen gleich $4n$ ist und deshalb muss sie durch 4 teilbar sein.
Überprüfen wir, welche Zahl mit 13 tauschen können. Eine Möglichkeit dafür ist, dass wir aus den Zahlen 1, 2, …, 13 diejenige aussuchen, die wir weglassen. Da $1 + 2 + ... + 13 = 91$ ist, die durch 4 geteilt den Rest 3 ergibt, suchen wir eine Zahl, die durch 4 geteilt auch den Rest 3 ergibt (nur so bekommen wir eine Summe mit der Formel $4n$). Die weggelassene Zahl kann also nur die Werte 3, 7 oder 11 haben, so sind Antworten (B) und (D) falsch.
Die nächsten Abbildungen zeigen, dass die Zahlen 3, 7 und 11 tatsächlich weglassbar sind:



ohne 3
$n = 22$



ohne 7
$n = 21$

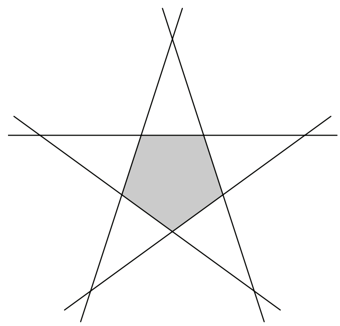


ohne 11
$n = 20$

(A) 22% **(B)** 18% **(C) 30%** **(D)** 20% **(E) 23%**

12. Auf wie viele Teile teilen den Raum die Grund- und Seitenflächen eines Prismas mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche?

(A) *11* **(B)** *16* **(C)** *33* **(D)** *48* **(E)** *Keine der bisherigen Antworten..*



Lösung: Nehmen wir zuerst nur die von den fünf Seitenflächen bestimmten Ebenen. Ihr Querschnitt bilden die fünf Seitengeraden eines regelmäßigen Fünfecks (siehe Abbildung).
Von der Abbildung ist abzulesen, auf wie viele Teile die fünf Seitengeraden die Ebene aufteilen: ein Teil in der Mitte, 2-2 Teile nach außen an den Seiten des Fünfecks und 1-1 Teil nach außen an den fünf Ecken, also insgesamt $1+10+5=16$ Teile. Genauso teilen die Seitenflächen des Prismas den Raum in 16 Teile. Die zwei parallelen Ebenen der Grundflächen teilen alle bisherigen Raumteile in drei Teile auf. So entstehen insgesamt $3 \cdot 16 = 48$ Raumteile.

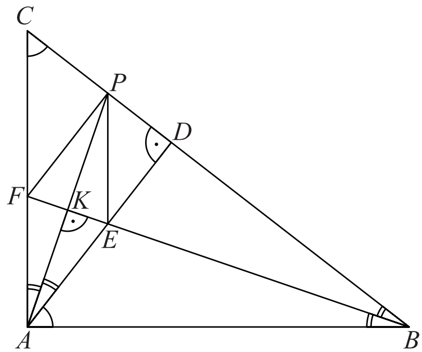
(A) 16% **(B)** 17% **(C)** 11% **(D) 18%** **(E)** 36%

13. Ein rechteckiges Dreieck hat den rechten Winkel bei Eckpunkt *A*. Eine Höhe ist *AD*, wo *D* ein innerer Punkt der Seite *BC* ist und *BF* ist die Winkelhalbierende bei Eckpunkt *B*, wo *F* ein innerer Punkt der Seite *AC* ist. Was können wir über das Viereck *AEPF* sagen, wenn *P* ein innerer Punkt der Strecke *DC* ist und *AP* die Winkelhalbierende des Winkels *DAC* ist bzw. *E* der Schnittpunkt von *AD* und *BF* ist?

(A) *Parallelogramm.* **(B)** *Trapez.* **(C)** *Drachenviereck.*

(D) *Raute.* **(E)** *Quadrat.*

Lösung: Fertigen wir eine Skizze, in der K der Schnittpunkt von AP und BF ist, an.



Die Dreiecke ABC, DAC und DBA sind ähnlich, da sie gleiche Winkel haben. So $ABC\measuredangle = DAC\measuredangle$ und $BCA\measuredangle = BAD\measuredangle$.
Auf Grund der Winkelhalbierenden $KAE\measuredangle = ABK\measuredangle = KAF\measuredangle$, bzw. $KAB\measuredangle + ABK\measuredangle = 90°$, hat Dreieck KAB bei Eckpunkt K einen rechten Winkel und so ist AK Mittelsenkrechte der Strecke EF. Da Dreiecke AKE und AKF deckungsgleich sind, ist $AF = AE$ und da Dreiecke PKE und PKF auch deckungsgleich sind, ist $PF = PE$. Deshalb ist das Viereck $AEPF$ ein Drachenviereck.
Dreiecke KAB und KPB sind auch deckungsgleich (ihre spitzen Winkel bei B und ihre Seiten KB sind gleich) und so ist $AK = KP$. Folglich ist das Drachenviereck $AEPF$ eine Raute. Quadrat kann es aber nicht sein, denn sein Winkel FAE (gleichgroß wie Winkel ABC) sind bestimmt kleiner, als 90°.
So ist das Viereck $AEPF$ eine Raute und folglich auch Drachenviereck, Parallelogramm und Trapez.

(A) 44% **(B)** 45% **(C)** 47% **(D)** 37% **(E)** 14%

Aufgabe zur ausführlichen Bearbeitung:

14. Gebt alle natürlichen Zahlen m, n und k an, wo
$(-1)^m + (-1)^n + (-1)^k = (-1)^{m+n+k}$ Begründet eure Antwort!

Lösung: Überprüfen wir die Gleichung danach, ob die Werte von m, n und k gerade oder ungerade sind. Wenn alle drei Unbekannten gerade sind, ist die linke Seite der Gleichung 3 und die rechte Seite 1, was zu keiner Lösung führt (4 Punkte). Ähnlich ist bei drei ungeraden Unbekannten die linke Seite -3 und die rechte Seite -1 Auch das führt zu keiner Lösung (4 Punkte). Wenn ein Unbekannter gerade ist und zwei ungerade, ist die linke Seite -1 und die rechte 1. Dies führt zu keiner Lösung (4 Punkte). Wenn schließlich ein Unbekannter ungerade ist und zwei gerade, ist die linke Seite 1 und die rechte -1 Wieder führt dies zu keiner Lösung. Es gibt also keine natürlichen Zahlen, die diese Gleichung erfüllen (4 Punkte). Eine andere aber richtige Begründung ist ähnlich dem beschriebenen Gedankenweg zu bewerten.

(Insgesamt 16 Punkte.)