

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB

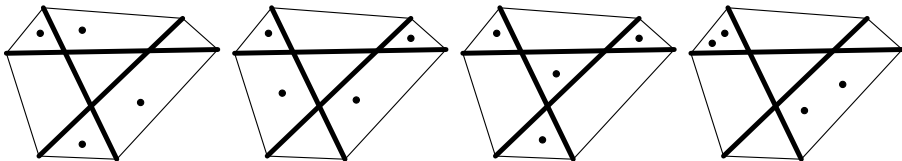
16. JANUAR 2018

LÖSUNGSSCHLÜSSEL

	Klasse 3	Klasse 4	Klasse 5		Klasse 6	Klasse 7	Klasse 8	
1.	A B C	A B C	D	1.	C	C D E	C D E	1.
2.	B C D E	B C D E	B C D	2.	B D	A E	B C D	2.
3.	A B C	A B C D	A B C	3.	A B C D E	A B C D	C	3.
4.	D E	D	E	4.	A B C D	A C D E	B D E	4.
5.	A B C	C D	A B C D	5.	D	A B C E	A E	5.
6.	B D	A B C D	B C D E	6.	B D E	A D E	A B C D	6.
7.	A B D	B D	B C D	7.	A B C D E	A B C D	A B C D E	7.
8.	A B C E	C	A B C D	8.	A E	D	A B D	8.
9.	A B C D E	C	B D	9.	B D	A	A C E	9.
10.	C	A B C D	B C D E	10.	A B D	A B C D E	B C D E	10.
11.	A B E	B C D E	A B C D E	11.	D	B C D	C	11.
12.	A B C D	B C D	B	12.	C D	A D E	A B C	12.
13.	B C D	B D	B E	13.	A B C	C D	C	13.
<i>Max. Punkte</i>	196 + 16	191 + 16	193 + 16	<i>Max. Punkte</i>	190 + 16	195 + 16	192 + 16	<i>Max. Punkte</i>

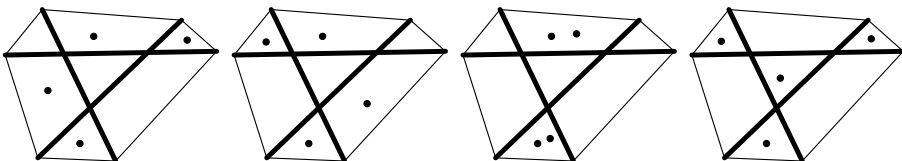
	Klasse 9	Klasse 10		Klasse 11	Klasse 12	
1.	B C E	C	1.	B C D E	A C E	1.
2.	A B C D E	A D	2.	D	A B C	2.
3.	A B C D E	A C E	3.	A B C D	B D E	3.
4.	A C E	A D	4.	A D	D	4.
5.	B D	B D	5.	B C D	C	5.
6.	B C D E	D E	6.	A B C D	B C D E	6.
7.	B	A D	7.	B C	C D E	7.
8.	A B C E	C E	8.	D	B C	8.
9.	B E	D	9.	A B C	B C D E	9.
10.	B	A B C	10.	B C D E	B	10.
11.	D	A	11.	A B E	B D E	11.
12.	B C D E	B	12.	B	B D	12.
13.	A B C D E	A B C D E	13.	A B	C E	13.
<i>Max. Punkte</i>	196 + 16	183 + 16	<i>Max. Punkte</i>	190 + 16	188 + 16	<i>Max. Punkte</i>

Klasse 3: Die folgenden Figuren zeigen die 4 Möglichkeiten:



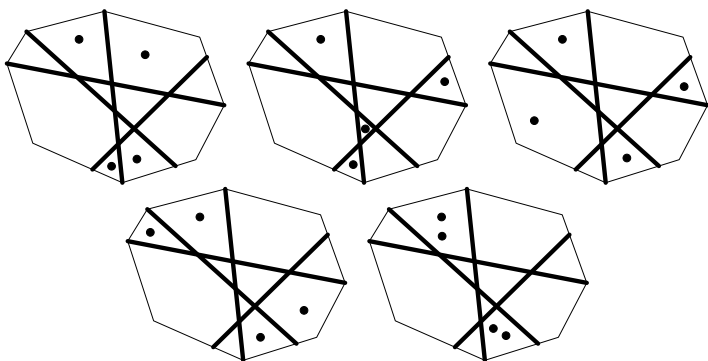
Für jede korrekte Figur gibt es je **4 Punkte (maximal 16 Punkte)**. Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.

Klasse 4: Die folgenden Figuren zeigen die 4 Möglichkeiten:



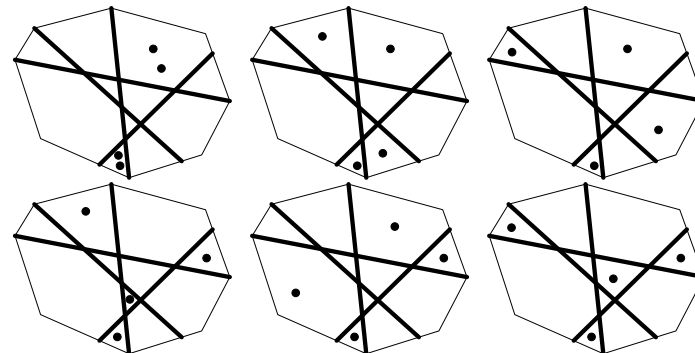
Für jede korrekte Figur gibt es je **4 Punkte (maximal 16 Punkte)**. Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.

Klasse 5: Die folgenden Figuren zeigen die 5 Möglichkeiten:



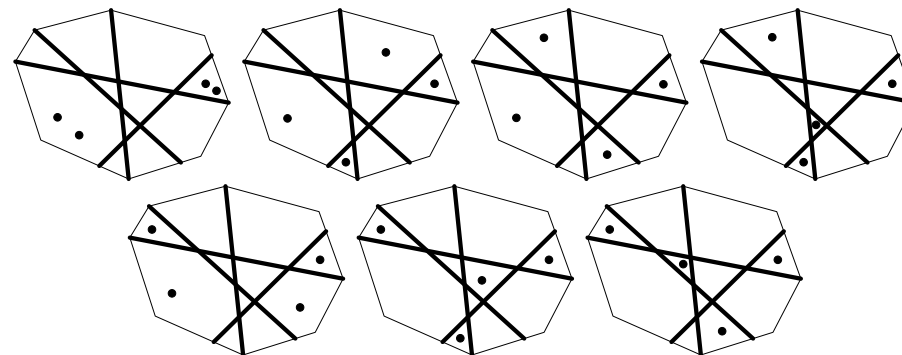
Für die ersten vier korrekten Figuren (egal, welche vier) gibt es je **3 Punkte**. Für die fünfte Figur gibt es **4 Punkte (maximal 16 Punkte)**. Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.

Klasse 6: Die folgenden Figuren zeigen die 6 Möglichkeiten:



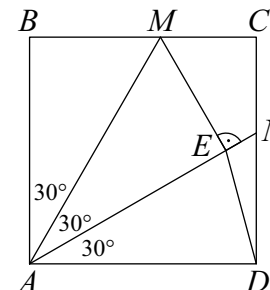
Für die ersten zwei Figuren (egal, welche zwei) gibt es je **2 Punkte**, für jede weitere Figur je **3 Punkte (maximal 16 Punkte)**. Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.

Klasse 7: Die folgenden Figuren zeigen die 7 Möglichkeiten:



Für die ersten fünf korrekten Figuren (egal welche fünf) gibt es je **2 Punkte**. Für die weiteren zwei Figuren gibt es je **3 Punkte (maximal 16 Punkte)**. Für falsche oder unvollständige Figuren gibt es keine Teilpunkte.

Klasse 8: Die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle AEM$ sind deckungsgleich (**2 Punkte**), denn AM ist eine gemeinsame Seite, $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN (= 30^\circ)$ und $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AEM = 90^\circ$ (**2 Punkte**). Daraus folgt: $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AD}$ (**2 Punkte**). Das Dreieck $\triangle EAD$ ist somit gleichschenkelig (**2 Punkte**). $\sphericalangle EAD = 30^\circ$ als ein Drittel von 90° (**2 Punkte**). Daher gilt: $\sphericalangle EDA = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$ (**2 Punkte**), bzw. $\sphericalangle EDC = \sphericalangle ADC - \sphericalangle EDA = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ (**2 Punkte**).



Antwort: $\sphericalangle EDC = 15^\circ$ (**2 Punkte**). (Insgesamt maximal 16 Punkte.)

Klasse 9: Der Innenwinkel bei C beträgt $180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$ (1 Punkt). Das

Dreieck ABC ist die Hälfte eines Rechtecks, F ist der Schnittpunkt der zwei Diagonalen. Daraus folgt:

$\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FC}$ (2 Punkte). Die Dreiecke FAC und FAB sind beide gleichschenkelig. Dies bedeutet:

$\sphericalangle CAF = 55^\circ$, $\sphericalangle BAF = 35^\circ$ (1 Punkt). Ferner gilt:

$\sphericalangle AFC = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$ (1 Punkt). Wegen der

Spiegelung ist $\sphericalangle FAT = \sphericalangle FAC$ (1 Punkt), und somit

$\sphericalangle FAT = 55^\circ$. Daraus folgt nun:

$\sphericalangle BAT = \sphericalangle FAT - \sphericalangle FAB = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$ (2 Punkte),

und $\overline{FT} = \overline{FC}$. Dadurch erhalten wir $\overline{FT} = \overline{FA} = \overline{FB}$ (1 Punkt). Die Dreiecke FTA

und FTB sind gleichschenkelig, daher $\sphericalangle ATF = \sphericalangle TAF = 55^\circ$ bzw.

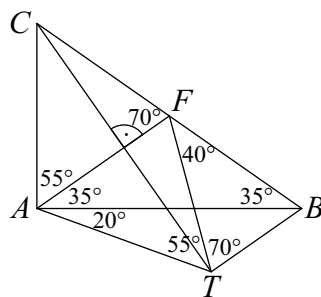
$\sphericalangle TFA = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$ (2 Punkte).

$\sphericalangle TFB = 180^\circ - (\sphericalangle TFA + \sphericalangle AFC) = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$ (2 Punkte) und somit

$\sphericalangle FTB = (180^\circ - \sphericalangle TFB) : 2 = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$ (1 Punkt) bzw.

$\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATF + \sphericalangle FTB = 55^\circ + 70^\circ = 125^\circ$ (2 Punkte).

(Insgesamt maximal 16 Punkte.)



Klasse 10: Peter sagte Bea, dass die Summe der drei Zahlen 13 ist (2 Punkte).

Begründung: 36 kann man auf acht Arten als Produkt dreier natürlicher Zahlen darstellen: $1 \cdot 1 \cdot 36$, $1 \cdot 2 \cdot 18$, $1 \cdot 3 \cdot 12$, $1 \cdot 4 \cdot 9$, $1 \cdot 6 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 4$ (für jedes Produkt 1 Punkt). Daher kann Bea nicht sofort wissen, welche Zahlen Peter meint.

Die Summe der drei Zahlen in den obigen Produkten ist, der Reihe nach, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10 (2 Punkte). 13 ist die einzige Summe, die zweimal vorkommt

(2 Punkte). Deswegen kann Bea nicht wissen, ob die drei Zahlen 1, 6, 6 oder 2, 2, 9

sind (2 Punkte). Alle anderen Summen kommen bei nur genau einem Produkt vor.

Daher musste Peter als Summe 13 gesagt haben. (Insgesamt maximal 16 Punkte.)

Klasse 11: Terme unter Quadratwurzeln dürfen nicht negativ sein (1 Punkt). Aus

$x - 9 \geq 0$ folgt $x \geq 9$ (2 Punkte) und $\sqrt{x - 9} \geq 0$ (1 Punkt). Damit ist $\sqrt{x} \geq \sqrt{9} = 3$

(2 Punkte) und $\sqrt{x + 9} \geq \sqrt{9 + 9} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$ (3 Punkte). Aus $\sqrt{x + 9} \geq 3\sqrt{2}$,

$\sqrt{x} \geq 3$ und $\sqrt{x - 9} \geq 0$ folgt:

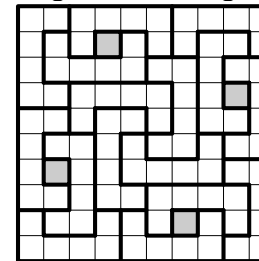
$\sqrt{x + 9} + \sqrt{x} + \sqrt{x - 9} \geq 3\sqrt{2} + 3 + 0 > 3 \cdot 1,4 + 3 + 0 = 4,2 + 3 = 7,2 > 7$ (4 Punkte).

Wir haben also gezeigt, dass die linke Seite der Ausgangsgleichung stets größer als 7

ist (2 Punkte). Dies bedeutet: Die Gleichung $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x} + \sqrt{x - 9} = 7$ hat keine

Lösung (1 Punkt). (Insgesamt maximal 16 Punkte.)

Klasse 12: Die folgende Abbildung enthält 16 Figuren:



Bei mehreren Lösungen wird nur die mit den meisten Figuren gewertet.

Für 12 Figuren gibt es 3 Punkte, für 13 Figuren gibt es 6 Punkte.

Für 14 Figuren gibt es 8 Punkte, für 15 Figuren gibt es 12 Punkte.

Für 16 Figuren gibt es 16 Punkte. (Insgesamt maximal 16 Punkte.)

Fehlerhafte Lösungen werden nicht gewertet.