

11. Ein Fußballverein führt ein Training folgendermaßen durch: Aus den 22 anwesenden Spielern werden rein zufällig zwei 11-er Mannschaften gebildet, die dann gegeneinander spielen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei besten Spieler gegeneinander spielen werden?

Bemerkung: Es gibt genau einen besten und genau einen zweitbesten Spieler.

- (A) kleiner als  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{1}{2}$       (C) größer als  $\frac{1}{2}$   
(D) kleiner als  $\frac{3}{5}$       (E) mehr als  $\frac{3}{5}$

12. Einige Steine wurden in einer geraden Reihe aufgestellt. Jeder Stein ist entweder rot oder grün (und es gibt sowohl rote als auch grüne Steine). Wenn zwischen zwei Steinen 6 oder 9 andere Steine stehen, dann haben diese zwei Steine dieselbe Farbe.

**Die Frage:** Wie viele Steine können sich in der Reihe befinden?

- (A) 13      (B) 14      (C) 15      (D) 16      (E) 17

13. Im Viereck  $ABCD$  ist  $E$  der Mittelpunkt der Seite  $BC$  und  $F$  der Mittelpunkt der Seite  $CD$ . Die Strecken  $AE$ ,  $AF$  und  $EF$  zerlegen das Viereck in die Dreiecke  $ABE$ ,  $AEF$ ,  $ADF$  und  $CEF$ . Die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser vier Dreiecke sind vier natürliche Zahlen (die Flächeneinheit ist  $\text{cm}^2$ ). Schreibt man diese vier Zahlen in aufsteigender Reihenfolge auf, so stellt man fest: Es handelt sich um vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. **Die Frage:** Höchstens wie viele  $\text{cm}^2$  kann der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABD$  betragen?

Bemerkung: Alle vier Innenwinkel des Vierecks sind kleiner als  $180^\circ$ .

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 9      (E) 10

**Löst die folgende Aufgabe an der angegebenen Stelle des Antwortblattes!**

14. Ein  $8 \times 8$  Schachbrett wird entlang der Gitternetzlinien in 7 Rechtecke zerlegt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. In jedem Rechteck gibt es genauso viele weiße wie schwarze Felder.

II. Es gibt keine zwei Rechtecke mit derselben Anzahl von weißen Feldern.

Findet alle möglichen verschiedenen Zerlegungen und zeichnet für jede Zerlegung eine eigene Figur.

1. Bemerkung: Die Felder eines Schachbretts sind in jeder Zeile und in jeder Spalte abwechselnd weiß oder schwarz. Das Feld unten rechts ist weiß.

2. Bemerkung: Zwei Zerlegungen gelten nicht als verschieden, wenn aus den 7 Rechtecken der einen Zerlegung und aus den 7 Rechtecken der anderen Zerlegung 7 Paare gebildet werden können, für die gilt: In jedem solchen Paar haben die zwei Rechtecke gleich viele weiße Felder.

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen.“

Prof. Dr. Freund Tamás

## BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

2019

1. RUNDE

KLASSE 12  
(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 12  
(ÖSTERREICH)



C. F. GAUSS



J. BOLYAI

**FÖRDERER DES WETTBEWERBS:**

**PROF. DR. FREUND TAMÁS**

*Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften,  
Vizepräsident der Ungarischen Akademie*

**BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:**

**NAGY-BALÓ ANDRÁS**, Mathematiklehrer

**ÜBERSETZER DER AUFGABEN:**

**ATTILA FURDEK**, Mathematiklehrer

**LEKTOR DER ÜBERSETZUNG:**

**MATTHIAS BENKESER**, Mathematiklehrer

**KOORDINATORIN:**

**RITA FESER**, Mathematiklehrerin

**BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:**

**GEORG PROBST**, Informatiker

**CSUKA RÓBERT**, Elektroingenieur



[www.bolyaiteam.at](http://www.bolyaiteam.at) / [www.bolyaiteam.de](http://www.bolyaiteam.de)

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf dem Antwortblatt mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

1. Im Inneren eines Parallelogramms  $ABCD$  liegt der Punkt  $P$ . Die Strecken  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  und  $PD$  zerlegen das Parallelogramm in die Dreiecke  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCP$ ,  $\triangle CDP$  und  $\triangle DAP$ . Drei dieser Dreiecke haben die Flächeninhalte  $10 \text{ cm}^2$ ,  $11 \text{ cm}^2$  und  $12 \text{ cm}^2$  (in beliebiger Reihenfolge). **Die Frage:** Wie viele  $\text{cm}^2$  kann der Flächeninhalt des vierten Dreiecks betragen?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

2. Zwei  $n$ -Ecke schneiden sich in insgesamt 80 Punkten. Welche Werte kann  $n$  annehmen?

**Bemerkung:** Die  $n$ -Ecke können auch Innenwinkel haben, deren Winkelweite mehr als  $180^\circ$  beträgt.

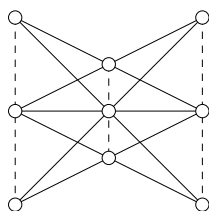
- (A) 10 (B) 20 (C) 36 (D) 38 (E) 40

3. In einem Raum sind 10 Personen. Jeder von ihnen ist entweder ein Ehrlicher (sie sagen stets die Wahrheit) oder ein Lügner (sie lügen stets). Jede Person trägt eine Mütze, die entweder weiß oder schwarz ist. Alle 10 Personen behaupten: „Von den 9 Mützen der anderen sind 3 schwarz und 6 weiß.“

**Die Frage:** Wie viele Lügner können sich insgesamt im Raum befinden?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 10

4. Die nebenstehende Figur zeigt 9 Äpfel in 10 Reihen (in jeder Reihe befinden sich genau 3 Äpfel). Es ist bekannt:  
I. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in neun Reihen gleich.  
II. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in genau einer Reihe abweichend.



Man hat eine Waage zum Wiegen der Äpfel.

**Die Frage:** Durch wie viele Messungen kann man auf jeden Fall entscheiden, welche die Reihe mit dem abweichenden Gesamtgewicht ist?

1. **Bemerkung:** Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.

2. **Bemerkung:** Die Waage liefert stets haargenaue Messergebnisse.

3. **Bemerkung:** Logisches Denken spielt bei der Lösung eine Schlüsselrolle.

- (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 9

5. In einer Gesellschaft hat jede Person genau drei Bekannte. Aus wie vielen Personen kann die Gesellschaft bestehen?

1. **Bemerkung:** Alle Bekanntschaften sind gegenseitig.

2. **Bemerkung:** Keine Person ist Bekannter von sich selbst.

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

6. Eva unterteilt die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 in zwei Gruppen, so dass das Produkt der Zahlen aus der ersten Gruppe und die Summe der Zahlen aus der zweiten Gruppe gleich sind. **Die Frage:** Aus insgesamt wie vielen Zahlen kann die erste Gruppe bestehen?

**Bemerkung:** Jede der zehn Zahlen kommt in genau einer der zwei Gruppen vor.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Keine dieser Antworten.

7. Wir schreiben in aufsteigender Reihenfolge alle Zahlen von 1 bis 299 auf, die nicht durch 3 teilbar sind:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ..., 289, 290, 292, 293, 295, 296, 298, 299 (\*)

**Die Frage:** Wie viele aufeinanderfolgende Zahlen aus der Aufzählung (\*) können als Summe 300 ergeben?

**Bemerkung:** Die Zahlen zwischen 11 und 289 sind durch die drei Punkte angedeutet.

- (A) 4 (B) 8 (C) 10 (D) 20 (E) 24

8. Bei einem Wettkampf gab es 25 Teilnehmer. Jeder bekam dieselben 3 Aufgaben. Man weiß noch Folgendes:

I. Jeder Teilnehmer löste mindestens eine Aufgabe.

II. Hier betrachten wir nur jene Teilnehmer, die die erste Aufgabe nicht lösten. Unter ihnen gibt es Teilnehmer, die die zweite Aufgabe lösten (Untergruppe A) und Teilnehmer, die die dritte Aufgabe nicht lösten (Untergruppe B). Untergruppe A war doppelt so groß wie Untergruppe B.

III. Hier betrachten wir nun zunächst alle Teilnehmer, die nur die erste Aufgabe lösten (Untergruppe C). Unter den restlichen Teilnehmern betrachten wir nun noch diejenigen, die die erste Aufgabe lösten (Untergruppe D). Untergruppe C ist um 1 größer als Untergruppe D.

IV. Die Hälfte derjenigen, die nur eine der Aufgaben lösten, hat die erste Aufgabe nicht gelöst.

**Die Frage:** Wie viele Teilnehmer konnten die erste Aufgabe gelöst haben?

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

9. Wie viele positive Zahlen gibt es mit dieser Eigenschaft: Wenn die Zahl mit 10 multipliziert wird, ist das Ergebnis eine Primzahl, und wenn die Zahl mit 15 multipliziert wird, ist das Ergebnis ebenfalls eine Primzahl.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) mehr als 3

10. Alle 100 Felder einer  $10 \times 10$  Tabelle waren ursprünglich weiß. Einige dieser Felder wurden dann so mit Grau markiert, dass gilt: Jedes  $4 \times 1$  (waagerechte) und jedes  $1 \times 4$  (senkrechte) Rechteck enthält mindestens ein graues Feld. Wie viele graue Felder kann die  $10 \times 10$  Tabelle insgesamt enthalten?

- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

**Achtung! Aufgaben 11-14 folgen auf der nächsten Seite.**