

11. Wir suchen die Kantenlänge eines Würfels, in den zwei Kugeln mit je 1 cm Radius so einbeschrieben werden können, dass sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Überprüft die Angaben.
 (A) π cm (B) 3,16 cm (C) 3,25 cm (D) 3,5 cm (E) 4 cm
12. x und y sind positive reelle Zahlen. Wir setzen diese in die Terme x , $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ein. Unter ihnen befindet sich ein kleinster Wert. Wie viel kann dieser Wert betragen?
 (A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{3}$
13. Gegeben ist ein allgemeines spitzwinkliges Dreieck. Wir spiegeln die Seitengeraden an den beiden nicht zu der aktuell gewählten Seite gehörenden Höhenlinien. So erhalten wir 6 Spiegelgeraden. Drei von diesen begrenzen das Dreieck $A_1B_1C_1$ im Inneren des ursprünglichen Dreiecks, die anderen drei das Dreieck $A_2B_2C_2$. Letzteres besitzt einen Winkel der Größe 20° und einen der Größe 70° . Findet die Werte unter den Angaben, die die Größe eines inneren Winkels im Dreieck $A_1B_1C_1$ sein können.
 (A) 20° (B) $46^\circ 40'$ (C) 60° (D) 70° (E) $73^\circ 20'$

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen.“

Prof. Dr. Freund Tamás

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®



C. F. GAUSS

2021

1. RUNDE

KLASSE 10

(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 10

(ÖSTERREICH)



J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:

PROF. DR. FREUND TAMÁS

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften,
Präsident der Ungarischen Akademie

Begründer des Wettbewerbs und Ersteller der Aufgaben:

NAGY-BALÓ ANDRÁS, Mathematiklehrer

Übersetzer der Aufgaben:

ZSUZSANNA WERNER, Mathematiklehrerin

Lektor der Übersetzung:

THOMAS WILHELM SCHWARZER, Mathematiklehrer

Koordinatorin:

ZSUZSANNA WERNER, Mathematiklehrerin

Betreiber der Homepage und des informatischen Systems:

GEORG PROBST, Informatiker

RÓBERT CSUKA, Elektroingenieur

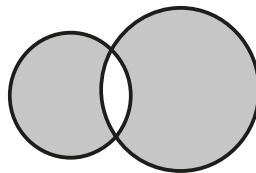


www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf der Website mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

- Ein Angler hatte einen guten Fang. Die drei größten Fische, die er an diesem Tag gefangen hatte, ergaben 35% des gesamten Gewichtes der Beute. Diese landeten in der Gefriertruhe. Die drei kleinsten Fische, die $\frac{3}{13}$ des Restgewichtes ausmachten, bekam die Katze. Was noch vorhanden war, ergab ein köstliches Mittagessen. Insgesamt wie viele Fische konnte der Angler an diesem Tag nach Hause gebracht haben?
 (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 17
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
 (A) Es gibt nicht-gleichseitige Dreiecke, die mit einem Schnitt in zwei deckungsgleiche Figuren zerlegt werden können.
 (B) Es gibt nicht-gleichseitige Dreiecke, welche durch 2 Schnitte in 3 deckungsgleiche Figuren zerlegt werden können.
 (C) Es gibt unter den nicht-gleichseitigen Dreiecken keine, welche durch 2 Schnitte in 3 deckungsgleiche Figuren zerlegt werden können.
 (D) Es gibt nicht-gleichseitige Dreiecke, die mit 3 Schnitte in 4 deckungsgleiche Figuren zerlegt werden können.
 (E) Es gibt unter den nicht-gleichseitigen Dreiecken keine, welche durch 3 Schnitte in 4 deckungsgleiche Figuren zerlegt werden könnten.
- Ein Computerprogramm funktioniert folgendermaßen: Auf dem Bildschirm erscheint eine Zahl. Aus ihr wird eine neue Zahl generiert, indem zunächst die letzte Ziffer der gezeigten Zahl um eins vermehrt wird, anschließend addiert das Programm diesen Wert und die ursprünglich gezeigte Zahl. Das Ergebnis erscheint auf dem Bildschirm. Der Vorgang wird wiederholt. Wie viele Primzahlen können auf dem Bildschirm in direkter Reihenfolge hintereinander erscheinen?
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

- Zwei Kreise mit den Radien 3 cm und 4 cm überlappen sich. Wie viel cm^2 kann die Differenz der gefärbten Flächen betragen?
 (A) weniger als 21 cm^2 (B) mehr als 21 cm^2
 (C) weniger als 22 cm^2 (D) 22 cm^2
 (E) mehr als 22 cm^2



- Wir ordnen jedem Eckpunkt eines Würfels eine reelle Zahl zu. Von jedem Eckpunkt gehen drei Kanten aus, die zu je einem Eckpunkt führen. Wir ermitteln den Mittelwert der Zahlen, die diesen Eckpunkten zugeordnet wurden. Das Ergebnis ist diejenige Zahl, die der Eckpunkt bekommt, von dem die drei Kanten gerade ausgingen. So ist die nebenstehende Abbildung entstanden. Welche der folgenden Zahlen konnte nicht unter den ursprünglich zugeordneten Zahlen sein?
 (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8
 - Wir schreiben 112-mal die 1 hintereinander und quadrieren anschließend diese Zahl. Wir schneiden von rechts nach links laufend die letzten 72 Ziffern ab. Welche Ziffer erscheint anschließend genau an der Einerstelle der neuen Zahl?
 (A) 0 (B) 2 (C) 6 (D) 8 (E) 9
 - Gesucht ist die Anzahl der reellen Zahlentripel, die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems sind.
 (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9
- $$\begin{cases} x^2 + 2yz = x \\ y^2 + 2zx = y \\ z^2 + 2xy = z \end{cases}$$
- P ist ein innerer Punkt des Parallelogramms $ABCD$. Die Strecken \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} , \overline{PD} zerteilen das Parallelogramm in vier Dreiecke. Drei von diesen haben die Flächen 1 cm^2 , 2 cm^2 und 3 cm^2 . Wie viel cm^2 groß kann das vierte Dreieck sein?
 (A) 1 cm^2 (B) 2 cm^2 (C) 3 cm^2 (D) 4 cm^2 (E) 6 cm^2
 - An einer Kinokasse stehen 8 Menschen in einer zufälligen Reihenfolge. Vier von ihnen haben einen 10 €-Schein in der Hand, die anderen vier einen 20 €-Schein. Jeder von ihnen möchte eine Karte kaufen, die 10 € kostet. Durch Personalwechsel befindet sich in der Kasse gerade kein Geld. In welchem Anteil der möglichen Reihenfolgen kann ein reibungsloser Verkauf garantiert werden?
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$
 - Auf dem Ziffernblatt einer sehr alten Wanduhr sind sämtliche Zahlen bis zur Unkenntlichkeit verblasst. Nun behaupten wir: Es ist egal, in welcher Reihenfolge die 12 Zahlen auf der Uhr neu angeordnet würden, wir könnten drei hintereinander folgende Zahlen so finden, dass ihre Summe mindestens
 (A) 18 ist. (B) 19 ist. (C) 20 ist. (D) 21 ist. (E) 22 ist.

Achtung! Die Aufgaben 11-13 folgen auf der nächsten Seite.