

11. Am Rande eines langen geraden Weges auf einer Wiese sitzen von links nach rechts angeordnet: Eine Heuschrecke (H), ein Grashüpfer (Gra) und eine Grille (Gri). Ab und zu springt eines der drei Insekten über einen Nachbarn. Welche der vorgegebenen Anordnungen werden sie nach 2021 Sprüngen haben, wenn sie stets nach dem beschriebenen Muster springen?
- (A) (H, Gra, Gri) (B) (Gri, Gra, H) (C) (Gra, Gri, H)
 (D) (H, Gri, Gra) (E) (Gra, H, Gri)
12. Wir erstellen das Netz eines Tetraeders, indem wir den Körper entlang der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten aufschneiden und dann die Dreiecksflächen in der Ebene der Grundfläche ausbreiten. Hierbei entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge 30 cm . Wie groß war das Volumen des Tetraeders?
- (A) weniger als 1000 cm^3 (B) mehr als 1000 cm^3
 (C) weniger als 1100 cm^3 (D) mehr als 1100 cm^3
 (E) mehr als 1200 cm^3
13. Auf jeder Seite eines Würfels zeichnen wir die Mittellinien, anschließend markieren wir diejenigen Punkte, die diese Linien im Verhältnis $1:3$ teilen. Die so entstandenen Punkte ergeben zusammen als Eckpunkte einen konvexen Körper. Den wievielten Teil des Würfelvolumens hat der Rauminhalt dieses Körpers?
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

„Als Gehirnforscher wünsche ich allen Menschen, dass wir trotz stark wachsender Informationsflut die Fähigkeit bewahren, auf unsere innere Stimme zu hören. Nur so können wir durch Kreativität und durch den Geist der Zusammenarbeit unsere Wünsche verwirklichen und dem Gemeinwohl dienen.“

Prof. Dr. Freund Tamás

BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB®

2021

1. RUNDE

KLASSE 12

(DEUTSCHLAND)

SCHULSTUFE 12

(ÖSTERREICH)



C. F. GAUSS



J. BOLYAI

FÖRDERER DES WETTBEWERBS:

PROF. DR. FREUND TAMÁS

Mitglied der Leopoldina, der Nationalen Akademie der Wissenschaften,
Präsident der Ungarischen Akademie

BEGRÜNDER DES WETTBEWERBS UND ERSTELLER DER AUFGABEN:

NAGY-BALÓ ANDRÁS, Mathematiklehrer

ÜBERSETZER DER AUFGABEN:

ZSUZSANNA WERNER, Mathematiklehrerin

LEKTOR DER ÜBERSETZUNG:

THOMAS WILHELM SCHWARZER, Mathematiklehrer

KOORDINATORIN:

ZSUZSANNA WERNER, Mathematiklehrerin

BETREIBER DER HOMEPAGE UND DES INFORMATISCHEN SYSTEMS:

GEORG PROBST, Informatiker

RÓBERT CSUKA, Elektroingenieur



www.bolyaiteam.at / www.bolyaiteam.de

Markiert die Lösungen der Aufgaben 1-13 auf der Website mit X. Bei den Aufgaben können auch mehrere richtige Antworten vorkommen.

- Welcher der vorgegebenen Terme kann für P in $x^6 + P \cdot x + x^4$ eingesetzt werden, damit eine Quadratzahl entsteht?
 (A) $2x^4$ (B) $\frac{1}{4}x^7$ (C) $\frac{1}{4}x$ (D) $-x^3$ (E) $-x^5$
- Wir drehen ein gleichseitiges Dreieck um seinen Mittelpunkt als Drehzentrum herum in positiver Drehrichtung (entgegen dem Uhrzeigersinn). Der Drehwinkel ist zuerst 3° , danach drehen wir um 9° weiter, dann um 27° weiter, im k -ten Schritt dann um 3^k Grad weiter. Wie viele verschiedene Positionen kann das Dreieck im Laufe der Drehungen maximal annehmen? (Wenn zwei Dreiecke einander vollständig abdecken, dann ist natürlich auch ihre Position gleich.)
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) mehr als 5
- Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Höhen im Dreieck ABC mit M . Ermittelt die Entfernung des Punktes M von der Seite \overline{BC} , wenn bekannt ist, dass die Länge der zu dieser Seite gehörenden Höhe 15 cm beträgt. Weiter teilt der Fußpunkt dieser Höhe die Seite \overline{BC} in zwei Teilstrecken mit 10 cm und 6 cm Längen.
 (A) 2,5 cm (B) 3 cm (C) 3,5 cm (D) 4 cm (E) 4,5 cm
- Wir schlagen in eine Schüssel nacheinander 10 Eier auf. Zwei der Eier sind faul. Dies merken wir leider erst beim Hineingleiten in die Schüssel. Wir können deshalb mit den übrigen Eiern nur dann fortfahren, wenn wir die Schüssel geleert und ausgewaschen haben. Angenommen, wir lernen nicht aus dem Missgeschick und haben immer unter 10 Eiern 2 faule. Welcher Anteil der faulen Eier geht so durchschnittlich verloren?
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$
- Wir stellen einen Kegel auf die Spitze und befüllen ihn mit Wasser so, dass es 10 cm hochsteht. Nun verschließen wir die kreisförmige Grundfläche und drehen den Kegel um. Die Wasserhöhe beträgt jetzt 2 cm. Bestimmt die Höhe des Kegels. Diese ist ...
 (A) weniger als 13 cm. (B) mehr als 13 cm. (C) weniger als 14 cm.
 (D) mehr als 14 cm. (E) weniger als 15 cm.

- Fünf gute Freunde machen eine unglaubliche Entdeckung: Teilt jeder die Anzahl der eigenen Bücher durch die Quersumme dieser Zahl, so erhalten alle das gleiche Ergebnis, nämlich die Zahl 13. Dann ...
 (A) kann es vorkommen, dass alle unterschiedliche Anzahlen von Büchern haben.
 (B) gibt es mindestens zwei unter ihnen mit der gleichen Anzahl von Büchern.
 (C) gibt es mindestens drei unter ihnen mit der gleichen Anzahl von Büchern.
 (D) gibt es mindestens vier unter ihnen, so dass je ein Paar die gleiche Anzahl von Büchern besitzt.
 (E) gibt es genau zwei Antworten unter den vorherigen, die wahr sind.
- Die Koordinaten eines Fünfecks sind: $A(0;0)$, $B(11;0)$, $C(11;2)$, $D(6;2)$, $E(0;8)$. Eine zur y -Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = a$ halbiert den Flächeninhalt des Fünfecks. Überprüft die Vorgaben bezüglich a .
 (A) $a > 2,5$ (B) $a < 3$ (C) $a > 3$ (D) $a < 3,5$ (E) $a > 3,5$
- In wie viele Teilräume können vier Ebenen, unter denen keine zwei parallel sind, den dreidimensionalen Raum insgesamt aufteilen? Überprüft diesbezüglich alle Angaben.
 (A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 14
- Wir würfeln mit einem nicht gefälschten Würfel (Laplace-Würfel) so lange, bis die Summe S der gewürfelten Zahlen 100 übersteigt. Welcher Wert von den gegebenen ist die wahrscheinlichste Summe?
 (A) 101 (B) 102 (C) 103 (D) 104 (E) 105
- Die Folge (a_n) wird folgendermaßen definiert:

$$a_1 = k \text{ (positive ganze Zahl), } a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{wenn } a_n \text{ gerade} \\ a_n + 5, & \text{wenn } a_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bei welchen der vorgegebenen Werten für k kommt dann unter den Folgengliedern die Zahl 1 vor?

- (A) 2018 (B) 2019 (C) 2020 (D) 2021 (E) 2022

Achtung! Aufgaben 11-13 folgen auf der nächsten Seite.