**BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB**

**16. JANUAR 2024**

# LÖSUNGSSCHLÜSSEL

| | Klasse 3 | Klasse 4 | Klasse 5 |
|---|---|---|---|
| 1. | **A B** | **A B** | **A B** |
| 2. | **C D E** | **A C D E** | **E** |
| 3. | **C D** | **C E** | **C E** |
| 4. | **B C** | **A B C D** | **A B C D** |
| 5. | **D** | **B C E** | **C E** |
| 6. | **C** | **B C D E** | **A B C D** |
| 7. | **B E** | **D** | **B C D** |
| 8. | **C** | **B E** | **A C D E** |
| 9. | **A B C D E** | **B C** | **A C D E** |
| 10. | **C D E** | **B C D** | **C E** |
| 11. | **C** | **E** | **A B C** |
| 12. | **B C** | **A C D** | **C** |
| 13. | **B** | **A B D E** | **D E** |
| | *198 Punkte* | *207 Punkte* | *206 Punkte* |

| | Klasse 6 | Klasse 7 | Klasse 8 | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | **E** | **B** | **D** | 1. |
| 2. | **A B C D** | **C D** | **A B C** | 2. |
| 3. | **A B C D** | **B C D E** | **C D E** | 3. |
| 4. | **A C E** | **B C D** | **C** | 4. |
| 5. | **B** | **C E** | **A B C D E** | 5. |
| 6. | **D** | **B C D** | **D** | 6. |
| 7. | **B C D** | **A B C D** | **B C D** | 7. |
| 8. | **A B E** | **A D** | **A B C** | 8. |
| 9. | **B C D E** | **A B** | **D** | 9. |
| 10. | **C** | **A B D E** | **A B C D** | 10. |
| 11. | **A B C D** | **A B C** | **A B C D E** | 11. |
| 12. | **B D E** | **A C E** | **B D E** | 12. |
| 13. | **D E** | **B C D E** | **C D E** | 13. |
| | *206 Punkte* | *209 Punkte* | *208 Punkte* | |

| | Klasse 9 | Klasse 10 | Klasse 11 | Klasse 12 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | **C** | **A B C** | **D** | **C D** | 1. |
| 2. | **C D E** | **D E** | **A B D** | **A B C** | 2. |
| 3. | **A C** | **C** | **D** | **B** | 3. |
| 4. | **A B C D** | **B D E** | **A** | **A B C D E** | 4. |
| 5. | **B E** | **B C D** | **A C D** | **B C E** | 5. |
| 6. | **C** | **A B C** | **A B C D E** | **B E** | 6. |
| 7. | **A B C E** | **C** | **C E** | **A** | 7. |
| 8. | **C E** | **D** | **A B C D** | **C** | 8. |
| 9. | **B D E** | **A B C** | **C** | **E** | 9. |
| 10. | **A C E** | **C** | **C E** | **A B C D E** | 10. |
| 11. | **C D E** | **B** | **A B C D E** | **B C** | 11. |
| 12. | **A B C D E** | **D** | **B C D** | **B C E** | 12. |
| 13. | **B C D E** | **A B C** | **B E** | **D** | 13. |
| | *209 Punkte* | *198 Punkte* | *205 Punkte* | *202 Punkte* | |

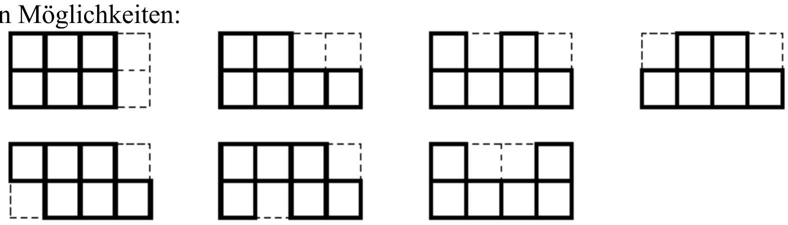
# BOLYAI MATHEMATIK TEAMWETTBEWERB – 16. JANUAR 2024 –

## LÖSUNGEN VON AUFGABEN 14

**Klasse 3:** Für jede richtige Operation werden **4 Punkte** vergeben. (**maximal 16 Punkte**.)

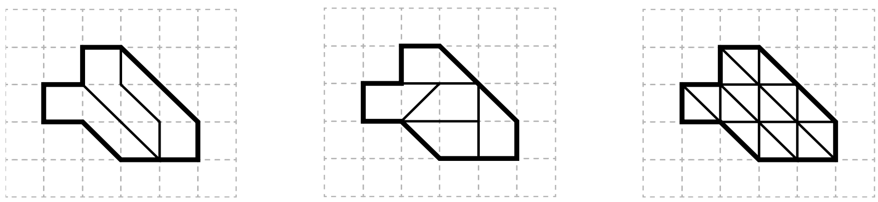
$$\begin{array}{ccccc} \boxed{9} & - & \boxed{5} & = & \boxed{4} \\ & & & & \times \\ \boxed{6} & : & \boxed{3} & = & \boxed{2} \\ & & & & = \\ \boxed{1} & + & \boxed{7} & = & \boxed{8} \end{array}$$

**Klasse 4:** Es gibt sieben Möglichkeiten:



1 korrekte Figur **2 Punkte**; 2 verschiedene korrekte Figuren **4 Punkte**; 3 verschiedene korrekte Figuren **6 Punkte**; 4 verschiedene korrekte Figuren **8 Punkte**; 5 verschiedene korrekte Figuren **10 Punkte**; 6 verschiedene korrekte Figuren **13 Punkte**; 7 verschiedene korrekte Figuren **16 Punkte**. (**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 5:**

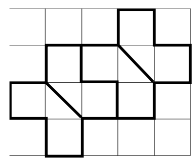


3 Teile (**7 Punkte**) | 5 Teile (**5 Punkte**) | 15 Teile (**4 Punkte**)

*Die gleiche Punktzahl kann für andere korrekte Zerlegungen vergeben werden (Jede Zerlegung kann nur einmal bewertet werden!)* (**maximal 16 Punkte**.)

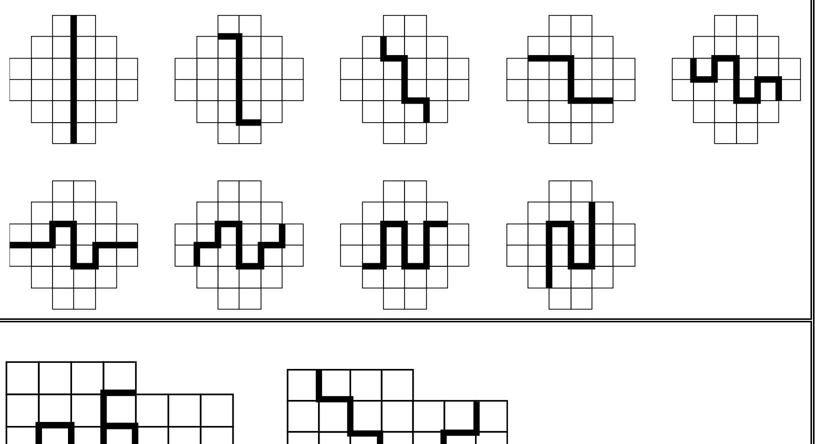
**Klasse 6:** a) Es gibt mehrere Möglichkeiten der Notation und Zerlegung. Hier ist jeweils ein Beispiel:

$$4\cdot 4\cdot (4+4-\frac{4+4}{4})+4=100;\ 444+44+4+4+4=500;\ \frac{4444-444}{4}=1000.$$

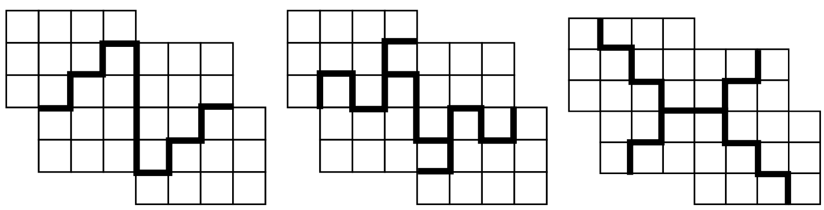


b)In (a) werden für jede richtig dargestellte Zahl jeweils **4 Punkte** vergeben. Wenn eine Zahl auf mehr als eine Weise richtig dargestellt wird, gibt es keine zusätzlichen Punkte. In (b) werden ebenfalls **4 Punkte** für eine korrekte Zerteilung vergeben. Es gibt zwar mehr als eine richtige Zerteilung, aber nur eine von diesen darf bewertet werden. Für fehlerhafte Lösungen werden weder bei a) noch bei b) Punkte abgezogen. (**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 7:** Die folgenden Bilder zeigen die Lösungen. Es gibt neun verschiedene Möglichkeiten. Eine richtige Lösung **1 Punkt**, 2 Lösungen **2 Punkte**, 3 Lösungen **4 Punkte**, 4 Lösungen **6 Punkte**, 5 Lösungen **8 Punkte**, 6 Lösungen **10 Punkte**, 7 Lösungen **12 Punkte**, 8 Lösungen **14 Punkte**, 9 Lösungen **16 Punkte**. (**maximal 16 Punkte**.)

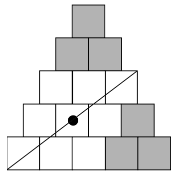


**Klasse 8:** Siehe Bilder!

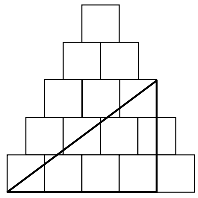


**5 Punkte** für 1 richtige Zerlegung, **10 Punkte** für 2 richtige Zerlegungen, **16 Punkte** für 3 richtige Zerlegungen. (**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 9: Lösung 1:** Verbinde den linken unteren Punkt mit dem rechten oberen Punkt des letzten Quadrats der Reihe mit 3 Quadraten (**4 Punkte**). Wir zeigen, dass diese Gerade die Fläche der Figur halbiert. Betrachten wir die Figur, die sich bestehend aus 3 Reihen mit je 3 Quadraten am linken Rand befindet (die weißen Quadrate unten) (**3 Punkte**). Sie ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrats in der Mitte (**2 Punkte**). Da unsere Gerade durch das Symmetriezentrum dieser Form verläuft, halbiert sie ihre Fläche (**2 Punkte**). Es gibt noch die oberen 3 grauen Quadrate auf der einen Seite der gezeichneten Geraden und die unteren 3 grauen Quadrate auf der anderen Seite dieser Gerade. Diese haben ebenfalls die gleiche Fläche (**3 Punkte**). Unsere Gerade halbiert also die Fläche der 15-Quadrat-Form (**2 Punkte**).



**Lösung 2:** Wir verbinden den linken unteren Punkt mit dem rechten oberen Punkt des letzten Quadrats in der Reihe der 3 Quadrate (**4 Punkte**). Wir zeigen, dass diese Gerade die Fläche der Figur halbiert. Zeichnen wir das Lot vom rechten oberen Eckpunktpunkt des letzten Quadrats der Reihe mit den 3 Quadraten auf die Gerade, die die Figur von unten begrenzt (**2 Punkte**). Dadurch entsteht ein rechtwinkliges Dreieck (**2 Punkte**). Sein Flächeninhalt entspricht der Fläche von $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Quadraten (**2 Punkte**). Außerhalb des Dreiecks befinden sich rechts unten noch 1,5 Quadrate, so dass sich insgesamt eine 7,5 Quadrate große Fläche unterhalb der gezeichneten Geraden befindet (**2 Punkte**). Dies ist die Hälfte der Fläche der Figur aus 15 Quadraten (**2 Punkte**). Somit kann man sagen, dass die gezeichnete Gerade die Gesamtfläche halbiert (**2 Punkte**).



(**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 10:** Da $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{y+\frac{2}{z}} > 0$ , kann $x$ 1 oder 2 sein (**2 Punkte**).

Wenn $x = 1$, dann gilt $\frac{2}{y+\frac{2}{z}} = 1\frac{1}{3}$, also $y + \frac{2}{z} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ (**2 Punkte**).

Da $\frac{2}{z} > 0$, kann $y$ nur 1 sein (**1 Punkt**). Hieraus folgt weiter: $\frac{2}{z} = \frac{1}{2}$ und somit $z = 4$ (**1 Punkt**). So ist (1; 1; 4) eine mögliche Lösung der Gleichung (**1 Punkt**).

Wenn $x = 2$, dann gilt $\frac{2}{y+\frac{2}{z}} = \frac{1}{3}$, somit $y + \frac{2}{z} = 6$ (**2 Punkte**). In dieser Gleichung sind $y$ und 6 positive ganze Zahlen, so muss auch $\frac{2}{z}$ eine positive ganze Zahl sein (**2 Punkte**). Letzteres gilt nur für $z = 1$ und $z = 2$ (**1 Punkt**). Wenn $z = 1$, dann ist $y = 4$ (**1 Punkt**), falls $z = 2$, dann $y = 5$ (**1 Punkt**).

Die Gleichung hat zwei weitere Lösungen, nämlich (2; 4; 1) bzw. (2; 5; 2) (**2 Punkte**). (**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 11:** Wählen wir die Position des ersten Multiplikationszeichens an einer beliebigen Stelle und teilen wir so die ursprüngliche Zahl in $A$ und $B$. Sei $k$ die Länge der Zahl $B$. Der Wert der ursprünglichen Zahl ist $A \cdot 10^k + B$, und der Wert des Produkts durch Einfügen des Multiplikationszeichens ist $A \cdot B$ (**2 Punkte**). Da die Zahl $B$ $k$ Ziffern hat, ist $10^k > B$ (**2 Punkte**). Es gilt: $A \cdot 10^k + B > A \cdot B + B = (A+1) \cdot B \geq A \cdot B$. (**4 Punkte**) Diese Argumentation lässt sich auf jedes zusätzliche Multiplikationszeichen anwenden. Es ist zu erkennen, dass jede Einfügung eines Multiplikationszeichens den Wert des Ausdrucks verringert (**4 Punkte**). Die größte Zahl erhält man also, wenn man kein Multiplikationszeichen einfügt (**3 Punkte**). Die größtmögliche Zahl ist 123 456 789 (**1 Punkt**). (**maximal 16 Punkte**.)

**Klasse 12:** Überprüfen wir, was die Bedingung bedeutet! Die Kantenlänge des Würfels sei $n$ Einheiten lang. Dann gilt: $\frac{V}{A} = \frac{n^3}{6n^2} = \frac{n}{6}$. Aus $\frac{n}{6} = \frac{5}{4}$ folgt: $n = 7{,}5$.

So einen Würfel gibt es nicht, da $n$ eine natürliche Zahl sein muss. Für $n = 8$ erhalten wir:

$$\frac{V}{A} = \frac{512}{384} = \frac{4}{3} > \frac{5}{4} = \frac{480}{384}.$$

Um einen Körper, der die Bedingung erfüllt, zu gewinnen, müssen wir das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge 8 Einheiten um 512 – 480 = 32 so verringern, dass seine Oberfläche erhalten bleibt.

Dazu schneidet man aus den 4 Ecken des Würfels kleinere Würfel von 2 *cm* Kantenlänge, d. h. 8 Volumeneinheiten, aus. Die Oberfläche ändert sich nicht, das Volumen nimmt insgesamt um 32 $cm^3$ ab. Für diesen Festkörper ist das Verhältnis $\frac{V}{A} = \frac{480}{384} = \frac{5}{4}$. Man kann also den gewünschten Körper herstellen.

Für die richtige Antwort gibt es **2 Punkte**, für die Angabe eines richtigen Aufbaus **8 Punkte** und für die Begründung, dass der Aufbau tatsächlich richtig ist, **6 Punkte**. Wenn nur der Versuch da ist, den richtigen Körper zu finden, dann können höchstens **3 Punkte** vergeben werden. (**maximal 16 Punkte**.)