

3. Klasse / 3. Schulstufe

1. Peter ist bei der Rechnung $11 - 9 + 3$ leider ein Rechenfehler unterlaufen. Welche Zahlen kann er nicht als Ergebnis erhalten haben?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Da die richtige Lösung der Rechnung 5 ist, kann er, da er ja einen Fehler gemacht hat, nur 5 nicht erhalten.

Richtige Antwort(en): E

2. Marie denkt sich eine Zahl, addiert zu ihrem Fünffachen 13 und erhält so 48. An welche Zahl hat sie gedacht?
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

Lösung: Vor dem Addieren der 13 hatte sie das Fünffache der Zahl, also $48 - 13 = 35$. Da die 35 das Fünffache der 7 ist, ist die gesuchte Zahl 7. Die richtige Lösung kann auch durch Ausprobieren der gegebenen Antwortmöglichkeiten erhalten werden.

Richtige Antwort(en): C

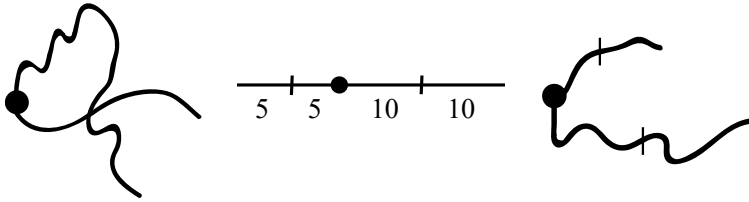
3. In einem Zirkus gibt es Dromedare und Kamele: Dromedare haben einen Höcker, Kamele zwei. In einer Vorstellung sind 3 Tiere zu sehen. Wie viele Höcker können die drei Tiere insgesamt haben?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Am wenigsten Höcker sind es, wenn es drei Dromedare und damit drei Höcker sind. Am meisten Höcker sind es, wenn es drei Kamele und somit sechs Höcker sind. Wenn von den drei Tieren nur eines ein Kamel ist, sind es 4 Höcker. Sind es genau zwei Kamele, so sind es insgesamt 5 Höcker. Da es keine weiteren Möglichkeiten gibt, können es nur 7 Höcker nicht sein.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

4. Ich habe einen 10 cm langen und einen 20 cm langen Draht an je einem Ende miteinander zusammengelötet und so einen einzigen Draht erhalten. Wie weit können die beiden Mittelpunkte voneinander entfernt sein, wenn das Lötmedium vernachlässigen ist?
(A) 0 cm (B) 10 cm (C) 15 cm (D) 20 cm (E) 30 cm

Lösung: Am nächsten sind sich die beiden Mittelpunkte, wenn beispielsweise beide Drähte krumm sind und sich die Mittelpunkte berühren. In diesem Fall sind sie 0 cm voneinander entfernt (siehe unten links).



Am weitesten sind sie voneinander entfernt, wenn beide Drähte gerade sind. In diesem Fall entspricht die Entfernung der zwei Mittelpunkte genau der Hälfte beider Drähte, also $5\text{ cm} + 10\text{ cm} = 15\text{ cm}$ (siehe oben Mitte). Alle Entfernungen dazwischen, also zwischen 0 cm und 15 cm , können durch das entsprechende Biegen der Drähte entstehen (siehe oben rechts).

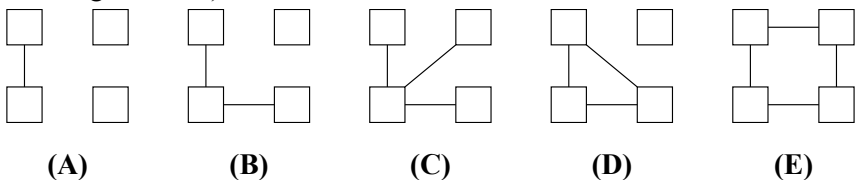
Richtige Antwort(en): A, B, C

5. Ein Wasserball-Match besteht aus vier Vierteln, die jeweils 8 Minuten lang sind. Die digitale Uhr zählt in jedem Viertel von 8 Minuten zurück, die Spielzeit endet jeweils, wenn die Uhr 0:00 anzeigt (die Uhr zeigt Minuten und Sekunden an). In welcher Minute ist das Spiel, wenn die Uhr im ersten Viertel gerade 5:25 anzeigt?
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (E) 6.

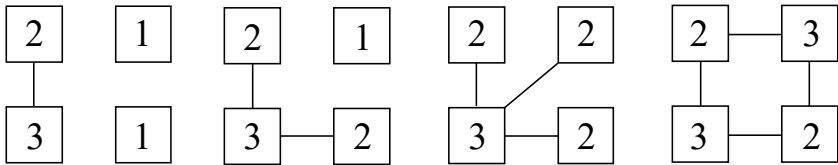
Lösung: Die 8 Minuten des ersten Viertels können auch als 7 Minuten und 60 Sekunden angesehen werden, somit sind vom ersten Viertel bereits 7 Minuten 60 Sekunden – 5 Minuten 25 Sekunden = 2 Minuten 35 Sekunden um. Wie man sieht, sind bereits mehr als zwei, aber auch weniger als drei Minuten um, also ist das Spiel gerade in der 3. Minute.

Richtige Antwort(en): B

6. Wir schreiben in jedes der abgebildeten Vierecke eine der Zahlen 1; 2; 3. Danach verbinden wir die Vierecke miteinander, in deren Zahlen die Summe 5 ergeben. Welche der folgenden Abbildungen können so zustandekommen? (Wir haben die Zahlen ausgeblendet.)



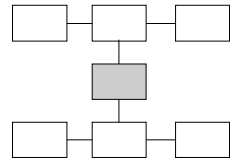
Lösung: Zwei Vierecke werden immer genau dann miteinander verbunden, wenn in einem Viereck 2 und in dem anderen 3 steht. Unten ist zu sehen, wie die Abbildungen (A), (B), (C) und (E) zustandekommen können:



Das Viereck unten links in Abbildung (D) ist mit zwei anderen Vierecken verbunden, also müssen in diese zwei Vierecke dieselben Zahlen eingetragen werden. Da diese zwei Vierecke miteinander verbunden sind, dürfen allerdings keine zwei gleichen Zahlen eingetragen werden, da so nie eine Summe von 5 erhalten werden kann. Somit können alle Abbildungen mit Ausnahme von (D) zustandekommen.

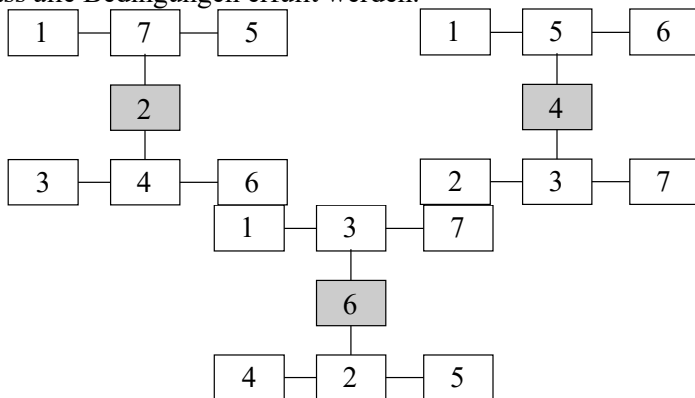
Richtige Antwort(en): A, B, C, E

7. Robert hat die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 so in die Vierecke in der Abbildung eingetragen, dass in jedem der Vierecke eine andere Zahl steht, die Summe der jeweils drei Zahlen in beiden Zeilen und der einen Spalte aber genau gleich ist. Welche Zahl kann er ins graue Viereck geschrieben haben?



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Da die Summe der Zahlen in den zwei Zeilen gleich ist, müssen wir, wenn wir von der Summe aller sieben Zahlen die Zahl im grauen Feld abziehen, eine Zahl erhalten, die durch zwei teilbar ist. Da die Summe aller sieben Zahlen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ ist, kann die Zahl im grauen Feld nur eine gerade Zahl, also 2, 4 oder 6 sein. In der Abbildung unten wird veranschaulicht, dass alle drei Zahlen in das graue Feld eingesetzt werden können, sodass alle Bedingungen erfüllt werden.



Richtige Antwort(en): B, C, E

8. In einem Blumengeschäft werden rote, weiße, gelbe und bordeauxrote Tulpen verkauft. Auf wie viele verschiedene Arten insgesamt kann man einen Blumenstrauß mit drei der Tulpen zusammenstellen, wenn in einem Strauß auch mehrere Tulpen der gleichen Farbe vorkommen können?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 16 (E) 20

Lösung: Verwenden wir die Anfangsbuchstaben der Farben, um alle Möglichkeiten aufzulisten:

rrr www ggg bbb

rrw rrg rrb wwr wwg ww b ggr ggw ggb bbr bbw bbg

rwg rwb rgb wgb

Wie man sieht, können 4 gleichfarbige Sträuße, 4 Sträuße, in denen alle drei Blumen verschiedene Farben haben, und 12 solche, in denen zwei Blumen gleichfarbig sind, entstehen. Somit können insgesamt 20 verschiedene Sträuße zusammengestellt werden.

Richtige Antwort(en): E

9. Anna hat in der Gleichung $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 1 = 30$ drei Zahlen zusammen mit dem jeweils davorstehenden Additionssymbol durchgestrichen (im Fall von 9 konnte nur die 9 durchgestrichen werden, da ja kein Additionssymbol davorsteht) und so eine wahre Gleichung erhalten. Welche Zahl könnte eine der durchgestrichenen Zahlen sein?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Am Anfang ist die Summe der Zahlen links nicht 30, sondern 43, daher muss die Summe durch das Durchstreichen der drei Zahlen um $43 - 30 = 13$ verkleinert werden. Die Summe der drei durchzustreichenden Zahlen ist links also genau 13:

$$1 + 3 + 9 = 13, \quad 1 + 4 + 8 = 13, \quad 1 + 5 + 7 = 13, \quad 3 + 4 + 6 = 13.$$

Somit kann Anna folgendes durchstreichen:

$$\cancel{9} + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + \cancel{3} + \cancel{1} = 30$$

$$9 + \cancel{8} + 7 + 6 + 5 + \cancel{4} + 3 + \cancel{1} = 30$$

$$9 + 8 + \cancel{7} + 6 + \cancel{5} + 4 + 3 + \cancel{1} = 30$$

$$9 + 8 + 7 + \cancel{6} + 5 + \cancel{4} + \cancel{3} + 1 = 30$$

Damit sind alle Antwortmöglichkeiten richtig.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

10. Ein verhexter Frosch springt auf dem Zahlenstrahl immer abwechselnd in Richtung der größeren und in Richtung der kleineren Zahlen. Der erste Sprung geht in die Richtung der kleineren Zahlen und ist genau 1 lang. Nach dem ersten Sprung springt der Frosch immer um 1 weiter als im Sprung davor. Von welcher Zahl aus ist der Frosch gestartet, wenn er mit dem 13. Sprung auf der 0 landet?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

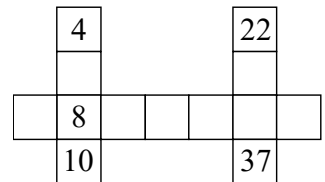
Lösung: Denken wir rückwärts!

Mit dem ersten Sprung springt der Frosch 1 weit, mit dem zweiten 2, ..., mit dem dreizehnten 13.

Somit ist der Frosch von der 13 auf die 0 gesprungen, auf die 13 wiederum von der $13 - 12 = 1$, auf die 1 von der $1 + 11 = 12$, auf die 12 von der $12 - 10 = 2$, auf die 2 von der $2 + 9 = 11$, auf die 11 von der $11 - 8 = 3$, auf die 3 von der $3 + 7 = 10$, auf die 10 von der $10 - 6 = 4$, auf die 4 von der $4 + 5 = 9$, auf die 9 von der $9 - 4 = 5$, auf die 5 von der $5 + 3 = 8$, auf die 8 von der $8 - 2 = 6$, auf die 6 von der $6 + 1 = 7$. Somit ist der Frosch von der 7 aus gestartet.

Richtige Antwort(en): D

11. Vervollständigt die Vierecke in der Abbildung so, dass in der Zeile von links nach rechts und in beiden Spalten von oben nach unten jede Zahl immer um einen konstanten Wert größer wird. Welche Zahl könnt ihr so in eines der Vierecke eintragen?

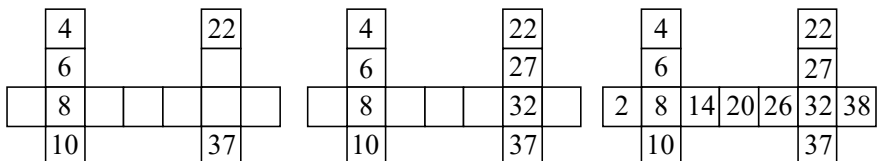


(A) 10 (B) 14 (C) 26 (D) 27 (E) 32

Lösung: In der Spalte links ist der Unterschied zwischen 10 und 8 $10 - 8 = 2$, daher ist die Zahl, die noch fehlt, $4 + 2 = 6$.

In der rechten Spalte kommen wir nach dreifacher Addition von 22 auf 37. Da $37 - 22 = 15$ und $15 : 3 = 5$ ist, sind die fehlenden Zahlen hier $22 + 5 = 27$ und $27 + 5 = 32$.

Im Moment kennen wir in der Zeile zwei Zahlen, 8 und 32. Gehen wir ähnlich vor wie in der Spalte rechts: $32 - 8 = 24$ und $24 : 4 = 6$, daher sind die fehlenden Zahlen $8 - 6 = 2$, $8 + 6 = 14$, $14 + 6 = 20$, $20 + 6 = 26$ und $32 + 6 = 38$.



Richtige Antwort(en): B, C, D, E

12. Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen kann Michael in sein Heft schreiben, die kleiner sind als 500 und deren Ziffernsumme 20 ist?
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Die 20 als Ziffernsumme einer dreistelligen Zahl kann auf folgende Arten entstehen:

$$20 = 9 + 9 + 2 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 8 + 4 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 6 = 7 + 7 + 6.$$

Die entsprechenden dreistelligen Zahlen sind: 299, 389, 398, 479, 488, 497. Somit kann Michael genau sechs oder weniger Zahlen in sein Heft schreiben.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

13. Ich habe die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in drei Zweiergruppen eingeteilt, sodass die Differenz (man zieht die kleinere Zahl von der größeren ab) der zwei Zahlen in jeder Gruppe genau gleich ist. Welche Zahl kann die Differenz sein?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die Differenz kann 1 sein, wenn die Gruppen (6, 5), (4, 3), (2, 1) sind.

Die Differenz ist 3, wenn die Gruppen (6, 3), (5, 2), (4, 1) sind.

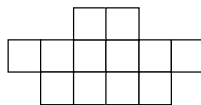
Wäre die Differenz 2, könnten sowohl die 2 als auch die 6 nur mit der 4 in eine Gruppe kommen, daher kann so eine Gruppeneinteilung nicht zustandekommen.

Wäre die Differenz 4 oder größer, hätte die 3 keinen passenden Partner.

Richtige Antwort(en): A, C

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. a) Teilt die hier abgebildete Figur mithilfe von Linien entlang der Gitterlinien in der Abbildung in vier Teile auf, die gleich groß sind und die gleiche Form haben.

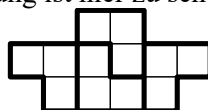


- b) Tragt in die Gleichung

$$** + ** + ** = 296$$

anstelle der *-Zeichen Ziffern ein, sodass die Gleichung stimmt! Ihr könnt sowohl gleiche als auch verschiedene Ziffern eintragen.

Lösung: a) Eine richtige Lösung ist hier zu sehen (8 Punkte):



- b)** Eine richtige Lösung ist zum Beispiel $99 + 99 + 98 = 296$ (8 Punkte). Für falsche Lösungen gibt es keinen Punktabzug.

4. Klasse / 4. Schulstufe

1. Wie viele Zahlen gibt es insgesamt, die 2025 ergeben, wenn zu der Zahl selbst ihre Ziffernsumme addiert wird?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Es gibt zwei solche Zahlen: 1998 und 2016. Diese sind richtig, weil $1998 + 1 + 9 + 9 + 8 = 2025$ und $2016 + 2 + 0 + 1 + 6 = 2025$.

Alle Zahlen, die kleiner als 1998 sind, haben eine kleinere Ziffernsumme als $1 + 9 + 9 + 8 = 27$, somit erhält man, wenn man 1997 oder kleinere Zahlen mit deren Ziffernsumme addiert, immer weniger als $1997 + 27 = 2024$.

Bei 1999: $1999 + 1 + 9 + 9 + 9 = 2027$, damit ergibt auch 1999 keine Lösung. Beginnend mit 2000 erhält man bis 2015 maximal $2015 + 2 + 0 + 1 + 5 = 2023$, daher ergeben auch diese Zahlen keine Lösung.

Von 2017 bis 2019 erhält man immer mindestens $2017 + 2 + 0 + 1 + 7 = 2027$.

Bei 2020: $2020 + 2 + 0 + 2 + 0 = 2024$, beginnend mit 2021 erhält man immer mindestens $2021 + 2 + 0 + 2 + 1 = 2026$, somit gibt es wirklich nur zwei entsprechende Zahlen, nämlich 1998 und 2016.

Richtige Antwort(en): C

2. Welche Zahl ergibt 5, wenn man sie zuerst halbiert und dann viertelt?

(A) 24 (B) 32 (C) 36 (D) 40 (E) 44

Lösung: Die 5 ist ein Viertel von 20, und 20 ist die Hälfte von 40. Somit ist die gesuchte Zahl 40.

Die Lösung kann auch durch Ausprobieren der Antwortmöglichkeiten gefunden werden.

Richtige Antwort(en): D

3. Ein Wasserball-Match besteht aus vier Vierteln, die jeweils 8 Minuten lang sind. Die digitale Uhr zählt in jedem Viertel von 8 Minuten zurück, die Spielzeit endet jeweils, wenn die Uhr 0:00 anzeigt (die Uhr zeigt Minuten und Sekunden an). In welcher Minute ist das Spiel, wenn die Uhr im zweiten Viertel gerade 2:25 anzeigt?

(A) 11. (B) 12. (C) 13. (D) 14. (E) 15.

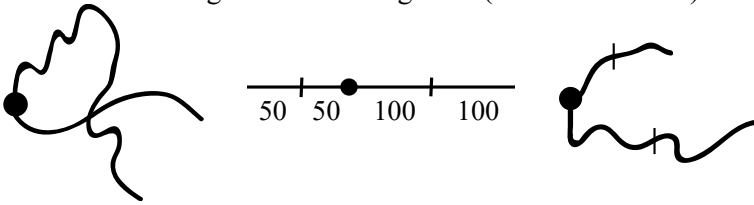
Lösung: Das acht Minuten dauernde zweite Viertel kann auch als 7 Minuten und 60 Sekunden angesehen werden, somit sind vom zweiten Viertel bereits $7 \text{ Minuten } 60 \text{ Sekunden} - 2 \text{ Minuten } 25 \text{ Sekunden} = 5 \text{ Minuten } 35 \text{ Sekunden}$ um. Vom gesamten Match ist außerdem das erste Viertel, also 8 Minuten, um, insgesamt also $8 \text{ Minuten} + 5 \text{ Minuten } 35 \text{ Sekunden} = 13 \text{ Minuten } 35 \text{ Sekunden}$. Wie man sieht, sind bereits mehr als 13, aber auch weniger als 14 Minuten um, also ist das Spiel gerade in der 14. Minute.

Richtige Antwort(en): D

4. Ich habe einen 100 cm langen und einen 200 cm langen Draht an je einem Ende miteinander zusammengelötet und so einen einzigen Draht erhalten. Wie weit können die beiden Mittelpunkte voneinander entfernt sein, wenn das Lötmedium zu vernachlässigen ist?

(A) 0 cm (B) 130 cm (C) 150 cm (D) 160 cm (E) 180 cm

Lösung: Am nächsten sind sich die beiden Mittelpunkte, wenn z.B. beide Drähte gebogen sind und die beiden Mittelpunkte sich nach dem Löten berühren. In diesem Fall beträgt die Entfernung 0 cm (siehe unten links).



Am weitesten entfernt sind die beiden Mittelpunkte voneinander, wenn beide Drähte gerade sind und sich so gegenseitig verlängern. In diesem Fall beträgt die Entfernung $50\text{ cm} + 100\text{ cm} = 150\text{ cm}$ (siehe oben Mitte). Alle Entfernungen dazwischen, also zwischen 0 cm und 150 cm, können entstehen, indem die Drähte dementsprechend gebogen sind (siehe oben rechts).

Richtige Antwort(en): A, B, C

5. In einer Schachtel sind 10 rote, 8 gelbe, 8 grüne und 7 schwarze Kugeln; andersfarbige Kugeln gibt es nicht. Wie viele Kugeln kann man mit geschlossenen Augen herausnehmen, wenn man sicherstellen möchte, dass von jeder Farbe noch eine Kugel in der Schachtel ist?

(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 24 (E) 27

Lösung: Wenn man 7 oder mehr Kugeln herausnimmt, kann es sein, dass man alle schwarzen Kugeln herausnimmt, daher können nicht 7 oder mehr Kugeln herausgenommen werden. Bei 6 oder weniger bleibt von jeder Farbe mindestens eine Kugel in der Schachtel, somit sind die Antworten 6 und 4 richtig.

Richtige Antwort(en): A, B

6. In einem 20-stöckigen Hochhaus sind im Erdgeschoss 3 Läden, aber keine Wohnungen. Im ersten Stock befinden sich 3 Wohnungen, in jedem Stockwerk darüber sind je 4 Wohnungen zu finden. Die Wohnungsnummern werden von 1 angefangen in aufsteigender Reihenfolge von unten nach oben vergeben. In welchem Stockwerk befindet sich die Wohnung mit der Nummer 46?

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12. (E) 13.

Lösung: Schauen wir uns an, was die höchste Wohnungsnummer in den jeweiligen Stockwerken ist:

1. Stock: 3;
2. Stock: $3 + 1 \cdot 4 = 7$;
3. Stock: $3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$;
4. Stock: $3 + 3 \cdot 4 = 3 + 12 = 15$;
5. Stock: $3 + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19$;
6. Stock: $3 + 5 \cdot 4 = 3 + 20 = 23$;
7. Stock: $3 + 6 \cdot 4 = 3 + 24 = 27$;
8. Stock: $3 + 7 \cdot 4 = 3 + 28 = 31$;
9. Stock: $3 + 8 \cdot 4 = 3 + 32 = 35$;
10. Stock: $3 + 9 \cdot 4 = 3 + 36 = 39$;
11. Stock: $3 + 10 \cdot 4 = 3 + 40 = 43$;
12. Stock: $3 + 11 \cdot 4 = 3 + 44 = 47$;

Da die Nummer 46 zwischen der 43 und der 47 liegt, ist sie im 12. Stockwerk.

Richtige Antwort(en): D

7. Ich habe die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 so in fünf Zweiergruppen eingeteilt, dass die Differenz (man subtrahiert die kleinere Zahl von der größeren) der zwei Zahlen in einer Gruppe bei allen Gruppen gleich ist. Wie viel kann die Differenz sein?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Wenn die Gruppen (10, 9), (8, 7), (6, 5), (4, 3), (2, 1) sind, ist die Differenz 1.

Wenn die Gruppen (10, 5), (9, 4), (8, 3), (7, 2), (6, 1) sind, ist die Differenz 5. Wenn die Differenz 2 wäre, könnte die 10 nur mit der 8 und daher die 6 nur mit der 4 in eine Gruppe kommen, so hätte die 2 aber keine passende Zahl, daher kann es so eine Gruppeneinteilung nicht geben.

Wäre die Differenz 3, könnten sowohl die 8 als auch die 2 nur mit der 5 in eine Gruppe eingeteilt werden, daher kann es auch diese Gruppeneinteilung nicht geben.

Wäre die Differenz 4, so könnten sowohl die 9 als auch die 1 nur mit der 5 in eine Gruppe eingeteilt werden, somit kann es diese Gruppeneinteilung auch nicht geben.

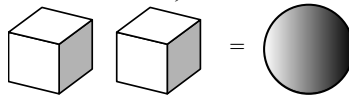
Richtige Antwort(en): A, E

8. Die Masse von zwei gleichen Bauklötzen entspricht der Masse einer Kugel. Zwei gleiche Quader haben die Masse von drei gleichen Kugeln. Wie viele solche Bauklötze braucht man, um die Masse eines Quaders zu erhalten?

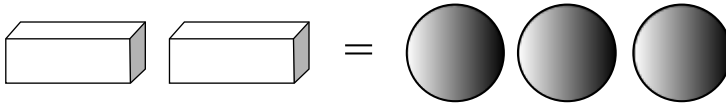
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Stellen wir uns vor, wir hätten ausreichend Klötze, Quader und Kug-

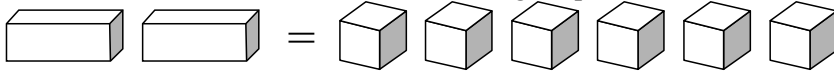
eln, um es auszuprobieren. Wir wissen, dass:



und



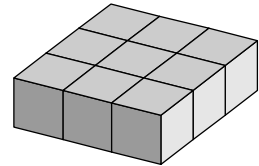
Die erste Gleichung zeigt, dass eine Kugel durch zwei Klötze ersetzt werden kann. Wir können dies in der zweiten Gleichung ausprobieren:



Wenn zwei Quader die Masse von 6 Klötzen haben, haben halb so viele Quader, also einer, die Masse von 3 Klötzen.

Richtige Antwort(en): C

9. In der Abbildung ist ein $3 \times 3 \times 1$ -großes Gebilde aus 9 Klötzen zu sehen. Wir schreiben in jeden Würfel eine Zahl, die angibt, mit wie vielen Würfeln er benachbart ist. (Zwei Würfel sind benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seitenfläche haben.) Mark hat die 9 Zahlen addiert, sich aber um 1 verrechnet. Welche Zahl konnte Mark so als Ergebnis erhalten?



- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

Lösung: Schauen wir uns die Zahlen in den Würfeln an:

2	3	2
3	4	3
2	3	2

Somit ist die Summe der 9 Zahlen $2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 3 + 2 = 24$. Da er sich um 1 verrechnet hat, kann er 23 oder 25 erhalten haben.

Richtige Antwort(en): C, E

10. Die 2026 ist eine Zahl, die ausschließlich aus geraden Ziffern besteht, die Ziffernsumme beträgt 10. Wie viele verschiedene positive dreistellige Zahlen, die gleichzeitig beide Eigenschaften erfüllen, konnte Michael in sein Heft schreiben?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

Lösung: Die 10 als Summe von 3 geraden Ziffern kann auf folgende Arten entstehen:

$$10 = 8 + 2 + 0 = 6 + 4 + 0 = 6 + 2 + 2 = 4 + 4 + 2.$$

Die dreistelligen Zahlen, die daraus entstehen können, sind: 802, 820, 208, 280, 604, 640, 406, 460, 622, 262, 226, 442, 424, 244, also insgesamt 14 Zahlen.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

11. Mein sparsamer Onkel hebt alle Kerzenreste auf und macht aus den Wachsresten von 7 Kerzen eine neue, 8. Kerze. Ich habe ihm 92 Kerzen geschenkt, wie viele kann er bei dieser Vorgehensweise maximal anzünden?
- (A) 92 (B) 105 (C) 106 (D) 107 (E) 108

Lösung: Wenn er die 92 Kerzen verbrannt hat, kann er aus den Resten 13 neue Kerzen machen, wobei ein Rest übrigbleibt, da $92 = 13 \cdot 7 + 1$; Aus den Resten der 13 Kerzen kann er eine neue machen, 6 Reste bleiben übrig, aus denen er mit dem einen Rest vom Anfang eine neue Kerze machen kann. Somit kann er maximal

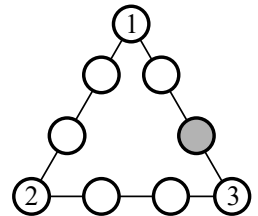
$$92 + 13 + 1 + 1 = 107$$

Kerzen verbrennen, wenn er 92 Kerzen von mir bekommen hat (und zwei Reste bleiben ihm übrig).

Richtige Antwort(en): D

12. Tragt in die noch leeren Kreise des Dreiecks die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ein (jede Zahl genau einmal), dass die Summe der Zahlen in den vier Kreisen einer Seite des Dreiecks immer gleich ist. Welche Zahl kann so in den grauen Kreis eingetragen werden?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9



Lösung: Wenn wir die Zahlen der drei Seiten des Dreiecks addieren, werden die Zahlen in den Ecken doppelt gezählt, da sie jeweils bei zwei Seiten mitgezählt werden. Daher ist die Summe aller drei Seiten

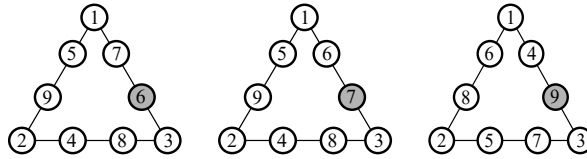
$2 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 51$. Da die Summe der Zahlen einer Seite immer gleich ist, muss sie immer $51 : 3 = 17$ sein. An den Enden der Seite mit dem grauen Dreieck stehen 1 und 3, daher muss die Summe der Zahlen in den zwei leeren Kreisen $17 - 1 - 3 = 13$ sein. Die 13 kann auf drei verschiedene Arten als Summe eines Zahlenpaares dargestellt werden:

$$13 = 9 + 4$$

$$13 = 8 + 5$$

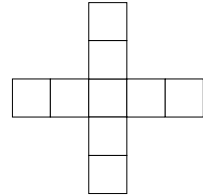
$$13 = 7 + 6$$

Die Summe der Zahlen in den zwei leeren Kreisen auf der waagerechten Seite des Dreiecks muss $17 - 2 - 3 = 12$ sein, und 12 kann nicht als Summe zweier Zahlen aus 4, 6, 7, 9 dargestellt werden, so können weder 8 noch 5 in den grauen Kreis oder den leeren Kreis daneben eingetragen werden. Alle anderen Zahlen aus den möglichen Antworten können in den grauen Kreis eingetragen werden, wie die Grafik veranschaulicht.



Richtige Antwort(en): B, C, E

13. Tragt die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in die Vierecke in der Abbildung ein (in jedes Viereck eine Zahl; jede Zahl darf nur einmal vorkommen), dass die Summe der fünf waagerecht gelegenen Zahlen doppelt so groß ist wie die Summe der fünf senkrecht gelegenen Zahlen. Welche Zahl kann so in das Viereck in der Mitte kommen?

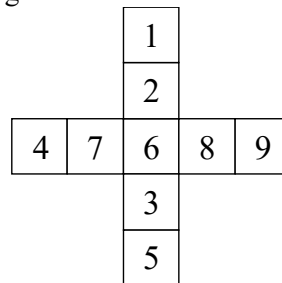
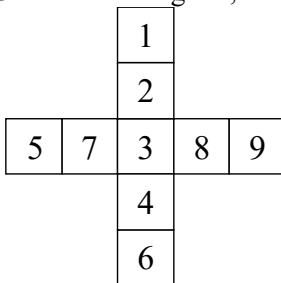


- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Die Summe aller Zahlen, die einzutragen sind, beträgt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Die Summe der waagerecht angeordneten Zahlen ist doppelt so groß, wie die Summe der senkrecht angeordneten Zahlen, weswegen wir, wenn wir diese zwei Summen addieren, eine Zahl erhalten müssen, die durch 3 teilbar ist. Die Zahl im Viereck in der Mitte wird doppelt gezählt, alle anderen Zahlen ein Mal. Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 ist ein Vielfaches von 3, deshalb muss auch die Zahl im Viereck in der Mitte durch drei teilbar sein, daher können dort nur die 3, 6 oder 9 eingetragen werden. Wenn die 3 in das Viereck in der Mitte eingetragen würde, wäre die Summe der senkrecht angeordneten Zahlen $(45 + 3) : 3 = 16$, die Summe der waagerecht angeordneten Zahlen $2 \cdot 16 = 32$. Das ist möglich, wie die Abbildung unten links veranschaulicht.



Ist die Zahl im mittleren Viereck 6, so ist die Summe der senkrecht angeordneten Zahlen $(45 + 6) : 3 = 17$, die der waagerecht angeordneten Zahlen $2 \cdot 17 = 34$. Auch das ist möglich, wie die Abbildung oben rechts veranschaulicht.

Wäre die Zahl im mittleren Viereck 9, so wäre die Summe der senkrecht angeordneten Zahlen mindestens $1 + 2 + 3 + 4 + 9 = 19$, obwohl sie eigentlich $(45 + 9) : 3 = 18$ sein müsste, daher ist dies unmöglich.

In das mittlere Viereck können sowohl 3 als auch 6 eingetragen werden.

Richtige Antwort(en): B, E**Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:**

14. Stellt die Zahl 20 als Summe von 8 ungeraden natürlichen Zahlen auf alle möglichen verschiedenen Arten dar! Dieselbe Zahl kann mehrmals verwendet werden, jedoch zählen zwei Möglichkeiten nicht als verschieden, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Zahlen unterscheiden.

Lösung: Es gibt elf verschiedene Möglichkeiten.

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 13$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 11$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 9$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 9$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 7$$

$$20 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5$$

$$20 = 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

1 richtige Lösung: 1 Punkt; 2 richtige Lösungen: 2 Punkte; ...; 6 richtige Lösungen: 6 Punkte; 7 richtige Lösungen: 8 Punkte; 8 richtige Lösungen: 10 Punkte; 9 richtige Lösungen: 12 Punkte; 10 richtige Lösungen: 14 Punkte; 11 richtige Lösungen: 16 Punkte.

5. Klasse / 5. Schulstufe

1. Bei einer zweistelligen positiven Zahl ist die Ziffer an der Einerstelle das Dreifache der Ziffer an der Zehnerstelle. Wenn wir die beiden Ziffern vertauschen, erhalten wir eine Zahl, die um 36 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Welche der folgenden Ziffern könnten in unserer Zahl vorkommen?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 9

Lösung: Es gibt genau 3 solche zweistelligen Zahlen, bei denen an der Einerstelle eine dreimal so große Zahl steht wie an der Zehnerstelle: 13, 26 und 39. Da $31 - 13 = 18$, $62 - 26 = 36$, $93 - 39 = 54$ ist, erfüllt von diesen Zahlen nur 26 die zweite Bedingung aus der Aufgabe. Also kommen in dieser Zahl die Ziffern 2 und 6 vor.

Richtige Antwort(en): B, D

2. Ich habe von den Zahlenkarten $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ vier Karten ausgewählt. Aus diesen vier Karten habe ich zwei zweistellige Zahlen gebildet, bei denen eine Zahl ein Teiler der anderen Zahl ist. Wie groß könnte der Quotient dieser beiden Zahlen sein?
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

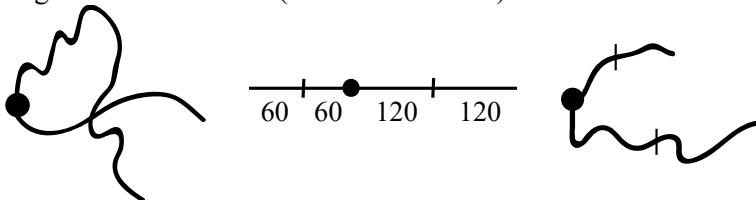
Lösung: Der Quotient kann 2, 3, 4 oder 5 betragen, denn $26:13=2$, $36:12=3$, $52:13=4$, $65:13=5$.

Der Quotient kann nicht 6 betragen, da der Quotient der größten und kleinsten Zahl (65 und 12), die man aus unseren Karten erstellen kann, kleiner als 6 ist.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

3. Ich habe einen 120 cm langen und einen 240 cm langen Draht an je einem Ende miteinander zusammengelötet und so einen einzigen Draht erhalten. Wie weit können die beiden Mittelpunkte voneinander entfernt sein, wenn das Lötmedium zu vernachlässigen ist?
- (A) 0 cm (B) 120 cm (C) 160 cm (D) 180 cm (E) 200 cm

Lösung: Die Mittelpunkte sind dann am nächsten, wenn die zwei Drähte gebogen sind und sich die Mittelpunkte beim Lötgen genau berühren. In diesem Fall beträgt der Abstand 0 cm (siehe Grafik links).



Am weitesten entfernt sind sie voneinander, wenn beide Drähte gerade sind und sich so gegenseitig verlängern. In diesem Fall beträgt der Abstand

zwischen den Halbierungspunkten $60\text{ cm} + 120\text{ cm} = 180\text{ cm}$ (siehe Grafik in der Mitte). Zwischen diesen Werten, also den Abständen zwischen 0 cm und 180 cm , kann jeder mögliche Abstand eingestellt werden, wir müssen die Drähte nur passend biegen (siehe Grafik rechts).

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

4. Schreibt die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in jeweils ein Feld der Tabelle (in jedes Feld eine andere Zahl). Dabei muss das Produkt der drei Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte gleich der Zahl am Ende der Zeile beziehungsweise Spalte sein. Wie groß könnte die Summe der beiden Zahlen in den grauen Feldern sein?

			126
			160
			18
	24	315	48

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Lösung: Es ist eindeutig, wo die 5 stehen muss, da es nur eine Zeile und eine Spalte gibt, in denen das Produkt der Zahlen durch 5 teilbar ist. Genauso finden wir auch den Platz für die 7. Bei den Spalten lässt sich nur das Produkt in der Mitte durch 9 teilen, also ist auch der Platz der 9 klar:

	7		126
	5		160
	9		18
	24	315	48

Anschließend schauen wir, wohin die 8 gehört. Ihr Platz kann nur in der mittleren Zeile sein, sie könnte aber sowohl am Anfang als auch am Ende der Zeile stehen. Wir probieren beides aus und erhalten die folgenden drei Möglichkeiten, um die Tabelle auszufüllen:

3	7	6	126
4	5	8	160
	9	1	18
	24	315	48

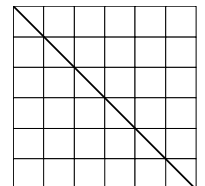
6	7	3	126
4	5	8	160
	9	2	18
	24	315	48

3	7	6	126
8	5	4	160
	9	2	18
	24	315	48

Somit kann die Summe der Zahlen in den grauen Feldern 7, 10 oder 11 betragen.

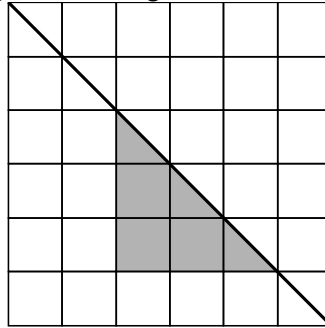
Richtige Antwort(en): A, D, E

5. Wir haben eine Diagonale des hier dargestellten 6×6 Gitternetzes eingezeichnet. Wie viele Dreiecke sind insgesamt in dieser Grafik zu sehen, bei denen alle drei Seiten eingezeichnet wurden?



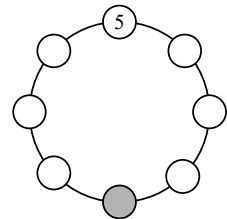
- (A) 2 (B) 30 (C) 36 (D) 42 (E) 49

Lösung: Im 6×6 Gitternetz befinden sich $7 \cdot 7 = 49$ Gitterpunkte. 7 von ihnen befinden sich entlang der eingezeichneten Diagonale. Außer den Gitterpunkten, die sich auf der Diagonale befinden, gehört zu jedem Gitterpunkt genau ein Dreieck, bei dem eine Seite auf der Diagonale und die anderen beiden entlang der Gitterlinien liegen. Weitere Dreiecke sind in dieser Grafik nicht eingezeichnet. Folglich sind insgesamt $49 - 7 = 42$ Dreiecke zu sehen.



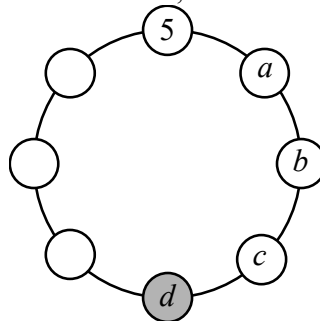
Richtige Antwort(en): D

6. Wir haben Zahlen in die kleinen Kreise der Grafik geschrieben. Dabei beträgt die Summe von zwei beliebigen benachbarten Zahlen immer 10 oder 11. In einem der Kreise steht 5. Welche Zahl könnte in dem markierten Kreis gegenüber der 5 stehen?

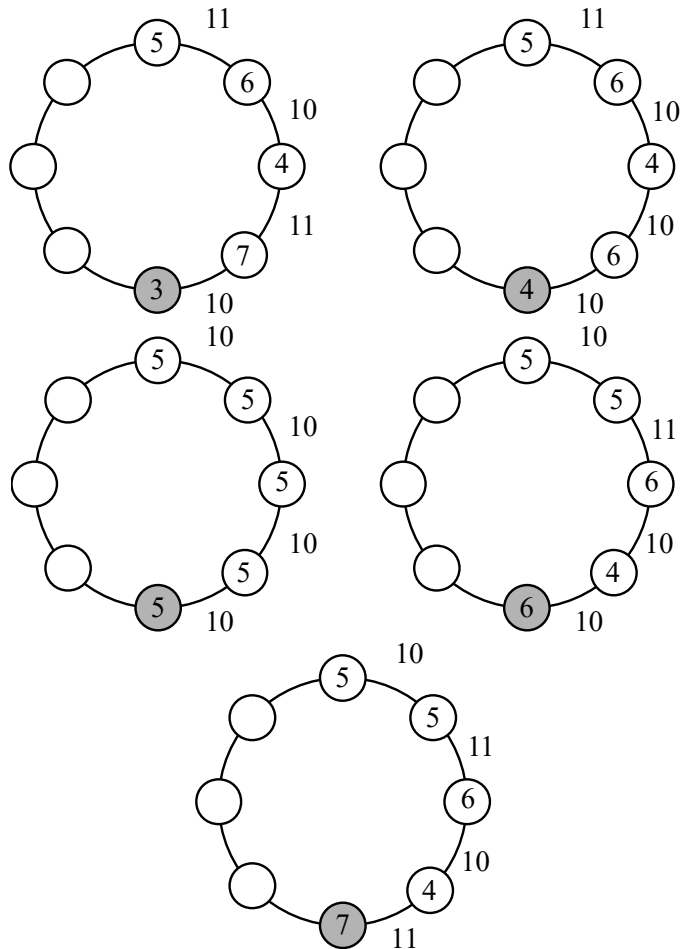


- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Lasst uns die Beschriftung der folgenden Grafik verwenden! Da der Wert von a entweder 5 oder 6 sein kann, kann der Wert von b 4, 5 oder 6 sein.



Der Wert von c kann 4, 5, 6 oder 7 betragen und von d 3, 4, 5, 6 oder 7, andere Möglichkeiten gibt es nicht. Die folgenden Grafiken zeigen, wie diese Werte verwirklicht werden können.



Auf die linke Seite können wir diese Zahlen hinüberspiegeln.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

7. Ich habe 10 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen auf eine leere Tafel geschrieben. Die Ziffernsumme dieser zehn Zahlen beträgt zusammen 56. Insgesamt wie viele Ziffern 1 könnten auf der Tafel stehen?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Lösung: Es können 10 1-er sein: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Oder es können 12 1-er sein: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110.

Die letzten Ziffern der 10 aufeinanderfolgenden Zahlen zählen alle 10 Ziffern auf, deren Summe beträgt 45. Deshalb muss die Summe der restlichen Ziffern der 10 Zahlen $56 - 45 = 11$ betragen.

Alle 10 Zahlen sind mindestens zweistellig, da die Summe der Zahlen an den

Zehnerstellen höchstens 9 betragen würde, wenn es unter ihnen einstellige Zahlen gibt, obwohl diese Summe 11 betragen müsste.

Die Summe der Ziffern an Stellenwerten, die höher als die Einerstelle sind, beträgt also 11. Bei 9 der 10 Zahlen beträgt die Ziffernsumme dieser höheren Stellenwerte 1, also insgesamt 9, bei der zehnten Zahl ist diese Ziffernsumme 2.

Also finden wir bei 9 der 10 Zahlen an diesen höheren Stellenwerten jeweils eine 1 und bei der zehnten Zahl entweder eine 2 oder zwei 1-er. An der Einerstelle von genau einer Zahl steht auch eine 1. Das sind dann insgesamt entweder 10 oder 12 1-er.

Anmerkung: Wir können die zwei richtigen Lösungen auch durch methodisches Durchprobieren der Möglichkeiten erhalten und anschließend weitere Möglichkeiten ausschließen.

Richtige Antwort(en): B, D

8. Ich habe an eine dreistellige Zahl gedacht. Diese Zahl stimmt an jeweils genau einer Stelle mit den Zahlen 543, 142 und 562 überein. Welche der folgenden Ziffern könnten in meiner gedachten Zahl vorkommen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Wenn die erste Ziffer meiner gedachten Zahl 5 ist, dann kann die zweite nicht 4 sein (wegen 543) und auch nicht 6 (wegen 562). Die dritte Ziffer kann (wegen 543) weder 3 noch 2 lauten (wegen 562). Deshalb kann meine gedachte Zahl nicht mit 5 beginnen.

Aus einem ähnlichen Grund kann die zweite Ziffer meiner Zahl nicht 4 und die dritte Ziffer nicht 2 sein.

Es bleibt nur eine Möglichkeit übrig: Meine gedachte Zahl lautet 163.

Richtige Antwort(en): A, C

9. Wir haben die teilnehmenden Kinder auf einem Schulausflug gefragt, wie viele Klassenkameraden von ihnen zu diesem Ausflug gekommen sind. Alle Kinder haben die Wahrheit gesagt. Zehn Kinder haben geantwortet, dass 4 Klassenkameraden dabei sind, zwölf Kinder, dass 3 dabei sind, sechs Kinder, dass 2 dabei sind, und vier Kinder, dass 1 Klassenkamerad dabei ist. Aus insgesamt wie vielen unterschiedlichen Klassen stammen die Kinder, die zum Ausflug gekommen sind?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Lösung: Wenn ein Kind sagt, dass außer ihm noch n Klassenkameraden anwesend waren, dann werden die n Klassenkameraden genau das gleiche antworten. Also sind die 10 Kinder, die 4 Klassenkameraden angegeben haben, aus insgesamt nur 2 Klassen gekommen, jeweils 5 Kinder aus einer und 5 Kinder aus der anderen Klasse. Die 12 Kinder, die 3 Klassenkameraden angegeben, stammen aus insgesamt 3 Klassen, mit jeweils 4 anwesenden Kindern pro Klasse. Die 6 Kinder, die 2 Klassenkameraden angegeben, kamen aus 2 un-

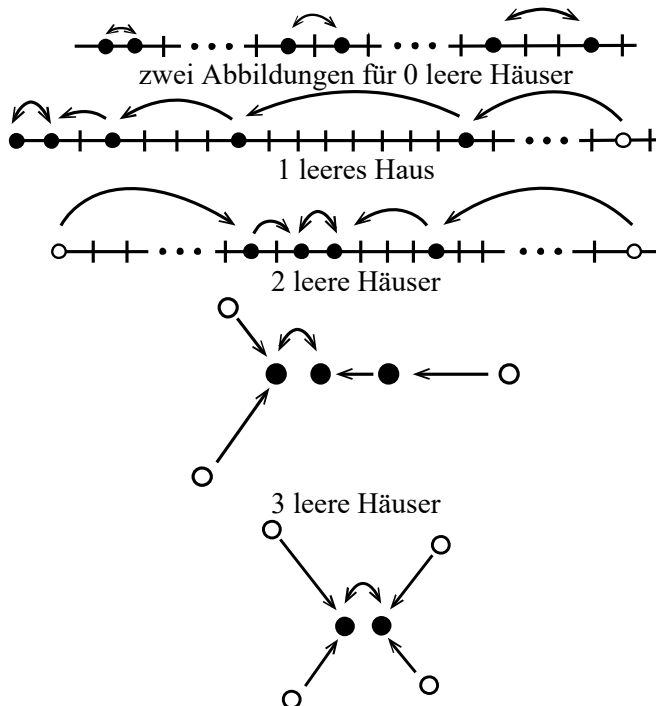
terschiedlichen Klassen, pro Klasse sind 3 Kinder zum Ausflug gekommen. Die 4 Kinder, die nur 1 Klassenkameraden angegeben haben, stammen aus 2 unterschiedlichen Klassen, pro Klasse sind 2 Kinder gekommen. So kamen die Kinder aus insgesamt $2 + 3 + 2 + 2 = 9$ unterschiedlichen Klassen zum Ausflug.

Richtige Antwort(en): D

10. In Neu-Schlumpfhäusern stehen die Häuser der Schlümpfe unterschiedlich weit voneinander entfernt. In jedem Haus wohnt genau ein Schlumpf. Noch vor Einbruch der Nacht kehrt jeder Schlumpf in sein eigenes Häuschen zurück und bleibt dort. Eines Nachts brach ein furchteinflößendes Gewitter aus. Dadurch erschrecken die Schlümpfe so sehr, dass jeder Schlumpf schnell in das nächstgelegene Schlumpfhäuser im Ort rannte. Wie viele Schlumpfhäuser könnten in dieser Nacht leer gestanden haben, wenn es im Ort 6 Häuschen gibt? Überprüft die folgenden Möglichkeiten!

- (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Sehen wir uns zuerst die zwei Häuser an, die zueinander am nächsten stehen. Die Bewohner dieser zwei Häuser rennen zum jeweils anderen, also wird es in mindestens zwei Häusern Schlümpfe geben. Also kann es nicht sein, dass 5 Häuser leer stehen. Die Abbildungen zeigen, dass die übrigen Möglichkeiten verwirklicht werden können.



4 leere Häuser

Die Zahl der leeren Häuser kann als 4, 3, 2, 1 oder 0 betragen.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

11. Kathi hat die Zahl 12 in eine Summe von vier ungeraden Zahlen zerlegt. Welche der folgenden Zahlen könnten sich als Produkt dieser vier ungeraden Zahlen ergeben?
 (A) 9 (B) 12 (C) 21 (D) 25 (E) 45

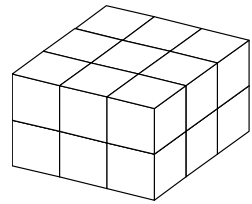
Lösung: Die möglichen Zerlegungen und die dazugehörigen Produkte lauten wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
 12 = 1 + 1 + 1 + 9 & 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 9 \\
 12 = 1 + 1 + 3 + 7 & 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21 \\
 12 = 1 + 1 + 5 + 5 & 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \\
 12 = 1 + 3 + 3 + 5 & 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \\
 12 = 3 + 3 + 3 + 3 & 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81
 \end{array}$$

Man sieht, dass nur die 12 nicht das Produkt der vier Zahlen sein kann. Dies können wir auch herausfinden, indem wir erkennen, dass 12 eine gerade Zahl ist, das Produkt von vier ungeraden Zahlen jedoch immer ungerade sein muss.

Richtige Antwort(en): A, C, D, E

12. Der $3 \times 3 \times 2$ Bauklötzturn in der Abbildung besteht aus 18 Würfeln. Wir beschriften jeden Würfel mit der Zahl, die angibt, mit wie vielen weiteren Würfeln er benachbart ist. (Zwei Würfel sind benachbart, wenn sie sich eine Seitenfläche teilen.) Marcel hat die 18 Zahlen addiert, sich beim Ergebnis aber um 1 verrechnet. Welche Summe könnte Marcel erhalten haben?



- (A) 63 (B) 64 (C) 65 (D) 66 (E) 67

Lösung: Sehen wir uns die Zahlen auf den Würfeln schichtweise an:

3	4	3
4	5	4
3	4	3

In der unteren Schicht ist die Summe: 33

3	4	3
4	5	4
3	4	3

In der oberen Schicht ist die Summe: 33

Somit beträgt die Summe der 18 Zahlen $33 + 33 = 66$. Da sich Marcel um 1 verrechnet hat, könnte er 65 oder 67 als Summe erhalten haben.

Richtige Antwort(en): C, E

13. Die Auflistung der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... sieht wie eine Schlangenlinie aus, wenn wir die Zahlen so in Zeilen und Spalten schreiben, dass die Zahlen in der ersten Zeile der Größe nach aufsteigend sind, wir die nächsten Zahlen in der zweiten Zeile aber umgekehrt, also in absteigender Reihenfolge, schreiben. In die dritte Zeile schreiben wir die Zahlen wieder aufsteigend und so weiter... Die Abbildung zeigt diese Beschriftungsart für 4 Spalten. Die erste Zeile ist aufsteigend, die zweite absteigend, also folgen immer abwechselnd aufsteigende und absteigende Zeilen aufeinander.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
↓			

14	13
...	
35	36

Insgesamt wie viele Spalten könnte eine Tabelle haben, bei der die Zahlen 14, 13 in Schlangenlinienbeschriftung in einer absteigenden Zeile stehen, aber die Zahlen 35, 36 in einer aufsteigenden Zeile und beide Zahlenpaare in denselben Spalten stehen?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Lösung: Es reicht aus, die Antwortmöglichkeiten zu überprüfen.

Unten ist zu sehen, dass wir für 4, 8 oder 12 Spalten eine passende Tabelle erstellen können.

Bei 6 Spalten stehen die Zahlen 13 und 14 unpassend in einer aufsteigenden Reihe.

Bei 10 Spalten stehen die Zahlen 35 und 36 in Zeile vier, die eine absteigende Zeile ist, was nicht der Aufgabenstellung entspricht.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
17	18	19	20
24	23	22	21
25	26	27	28
32	31	30	29
33	34	35	36

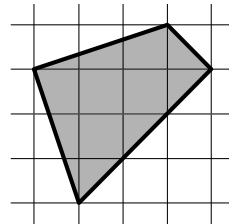
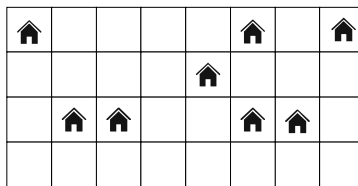
1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36

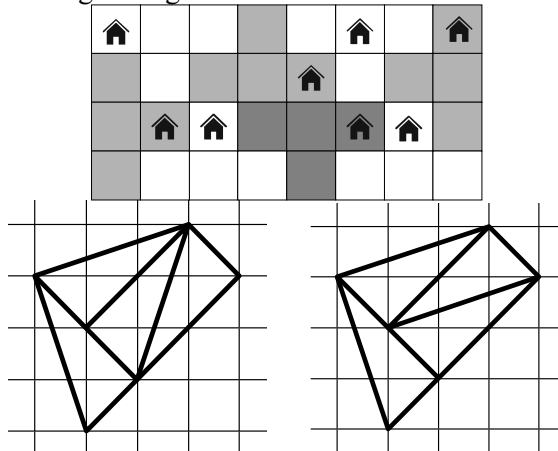
Richtige Antwort(en): A, C, E

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

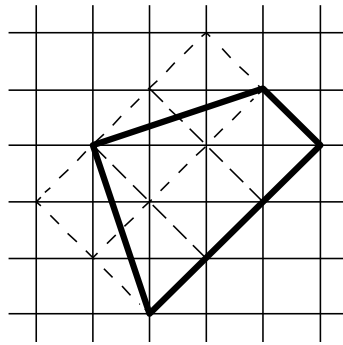
14. a) Teilt die Grafik links entlang der Gitterlinien in 8 Stücke, die die gleiche Form und gleiche Größe haben, sodass in jedem Stück 1 Häuschen steht!
 b) Teilt die Form in der Grafik rechts (nicht zwingend anhand der Gitterlinien) in vier gleich große und gleichförmige Stücke! Es reicht aus, wenn ihr für beide Aufgaben eine richtige Aufteilung zeichnet.



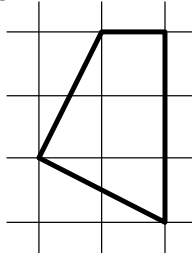
Lösung: Unterhalb sind für die linke Aufgabe eine und für die rechte Aufgabe zwei mögliche Lösungen dargestellt.



Die richtige Zerlegung beider Formen wird mit jeweils 8 Punkten belohnt. Bei der rechten Aufgabe können nur für eine Lösung Punkte vergeben werden. Die zwei Lösungen, die rechts abgebildet sind, können mit Hilfe der folgenden Linien enträtselt werden.

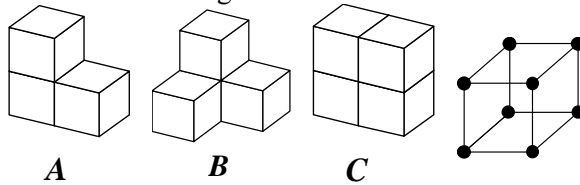


Durch Drehen erhalten wir folgenden Blickwinkel:



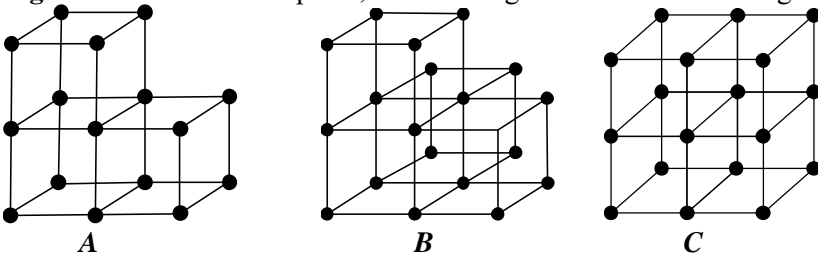
6. Klasse / 6. Schulstufe

1. Karli hat das Gitternetzmodell der unten dargestellten Körper, die der Reihe nach aus jeweils 3, 4 und erneut 4 Würfeln bestehen, aus Streichhölzern nachgebaut, die er mit Knetgummi zusammenklebte. Dabei hat er die kleinstmögliche Anzahl an Streichhölzern verwendet, baute aber auch die inneren Kanten mit jeweils einem Streichholz nach. (Man darf die Streichhölzer nicht zerbrechen, ein Modell eines so gefertigten Würfels ist rechts zu sehen.) Insgesamt wie viele Streichhölzer benötigte er?



- (A) Für das Modell von A 36 Streichhölzer.
 (B) Für das Modell von B 36 Streichhölzer.
 (C) Für das Modell von C 32 Streichhölzer.
 (D) Für das Modell von C 48 Streichhölzer.
 (E) Für das Modell von A weniger als 30 Streichhölzer.

Lösung: Das Modell der Körper A, B beziehungsweise C sieht wie folgt aus:



Für das Modell von Körper A benötigte er waagrecht mindestens $4 + 7 + 7 = 18$ Streichhölzer und senkrecht mindestens $4 + 4 + 2 = 10$ Streichhölzer, also musste Karli mindestens 28 Streichhölzer verwenden. 28 ist kleiner als 30, daher ist die Antwortmöglichkeit (A) nicht richtig, (E) jedoch richtig.

Im Modell von Körper B befinden sich im Vergleich zu A mindestens weitere $3 + 3$ waagrechte und 2 senkrechte Streichhölzer, also besteht es aus insgesamt $28 + 6 + 2 = 36$ Streichhölzern. Also ist Antwort (B) richtig.

Im Modell von Körper C befinden sich im Vergleich zu A mindestens weitere 3 waagrechte und 2 senkrechte Streichhölzer, also besteht es aus insgesamt $28 + 3 + 2 = 33$ Streichhölzern. Also sind weder die Antwortmöglichkeiten (C) noch (D) richtig.

Richtige Antwort(en): B, E

2. Wir haben vier positive ganze Zahlen paarweise miteinander multipliziert und folgende Produkte erhalten: 12; 15; 20; 21; 28; 35. Welche der folgenden Zahlen könnten wir als Summe erhalten, wenn wir zwei der ursprünglichen vier Zahlen addieren?

(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

Lösung: Zerlegen wir die paarweise berechneten Produkte in ihre zwei Faktoren!

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$$

$$20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$$

$$21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$$

$$28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$$

$$35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$$

Da sich die Produkte unterscheiden, müssen auch die vier Zahlen unterschiedlich sein. Da die Zahlen paarweise multipliziert werden, muss jede Zahl dreimal unter den Faktoren vorkommen. Daher können die vier Zahlen nur 3, 4, 5 und 7 sein.

Die paarweise berechneten Summen von diesen Zahlen sind:

$$3 + 4 = 7$$

$$3 + 5 = 8$$

$$3 + 7 = 10$$

$$4 + 5 = 9$$

$$4 + 7 = 11$$

$$5 + 7 = 12$$

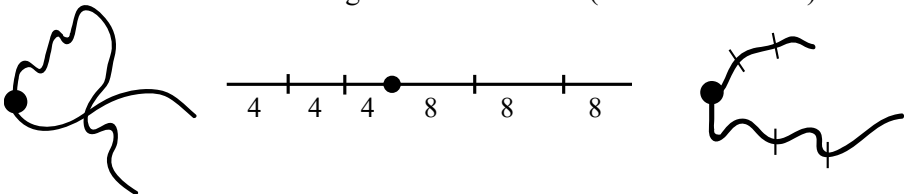
Von diesen Summen finden wir 9, 11 und 12 unter den Antwortmöglichkeiten.

Richtige Antwort(en): A, B, C

3. Ich habe einen 12 cm langen und einen 24 cm langen Draht an einem Ende zusammengelötet. Wie viele cm könnte der Drittelungspunkt von einem Draht von dem Drittelungspunkt des anderen Drahtes entfernt sein, wenn die Menge des Lötmaterials vernachlässigbar ist?

(A) 0 cm (B) 12 cm (C) 18 cm (D) 24 cm (E) 28 cm

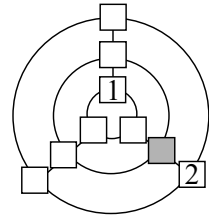
Lösung: Die Drittelungspunkte sind dann am nächsten, wenn die zwei Drähte zum Beispiel gebogen sind und sich beim Löten genau am Drittelungspunkt berühren. In diesem Fall beträgt der Abstand 0 cm (siehe Grafik links).



Am weitesten entfernt sind sie voneinander, wenn beide Drähte gerade sind und sich so gegenseitig verlängern. In diesem Fall beträgt der Abstand zwischen den Drittelungspunkten $8 \text{ cm} + 16 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ (siehe Grafik in der Mitte). Zwischen diesen Werten, also den Abständen zwischen 0 cm und 24 cm, kann jeder mögliche Abstand eingestellt werden, wir müssen die Drähte nur passend biegen (siehe Grafik rechts).

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

4. Schreibt die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die leeren Quadrate der Grafik (in jedes Quadrat eine andere Zahl), sodass die Summe der Zahlen in den Quadraten entlang aller drei Kreise und aller drei Strecken dieselbe ist. Welche Zahl könnte so im grauen Quadrat stehen?



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Nach dem Ausfüllen beträgt die Summe der Zahlen in der Grafik $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Da die Summe der Zahlen entlang jedes Kreises und jeder Strecke dieselbe ist und es jeweils drei von diesen gibt, wird diese Summe $45:3=15$ betragen.

Auf der Strecke, auf der die 1 steht, muss die Summe der übrigen Zahlen 14 betragen. Das kann auf zwei Arten erreicht werden: $14=9+5=8+6$. Also kann auf der Strecke zusätzlich zur 1 auch das Zahlenpaar (9, 5) oder (8, 6) stehen. Verwenden wir die Beschriftung der Grafik links unten!

Wenn $a=9$, dann ist $b=5$ und $c=8$, das ist aber nicht möglich, da die 8 auf dem Kreis mit der 1 stehen muss.

Wenn $a=5$, dann ist $b=9$ und $c=4$. In diesem Fall steht, falls $c=8$ ist, an der Stelle $d=5$, das kann aber nicht sein, da $a=5$ ist und man eine Zahl nur einmal verwenden darf.

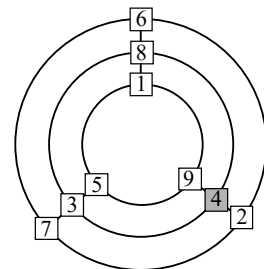
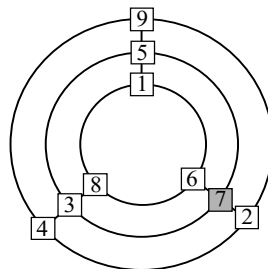
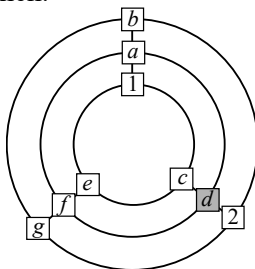
Also ist $c=6$, $e=8$ und somit $d=7$, $f=3$.

Wenn $a=6$, dann ist $b=8$ und $c=5$, das ist aber nicht möglich, da die 5 und die 1 auf demselben Kreis stehen müssen.

Wenn $a=8$, dann ist $b=6$ und $c=7$. In diesem Fall steht, falls $c=5$ ist, an der Stelle $d=8$, das kann aber nicht sein, da $a=8$ bereits besetzt ist.

Also ist $c=9$, $e=5$ und somit $d=4$, $f=3$.

So kann unsere Grafik auf zwei Arten passend ausgefüllt werden, wie unten rechts dargestellt wird. Also kann in dem grauen Quadrat die Zahl 4 oder 7 stehen.



Richtige Antwort(en): B, E

5. In die Felder einer Tabelle sollen wir die Buchstaben A, N, D, O, R so hineinschreiben, dass jeder Buchstabe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale genau einmal vorkommt. Einige Buchstaben habe ich bereits eingetragen. Füllt die Tabelle fertig aus! Welcher Buchstabe könnte im dunklen Feld stehen, wenn in jedem Feld nur ein Buchstabe stehen darf?

		N		
A	N	D	O	R

- (A) A (B) N (C) D (D) O (E) R

Lösung: Durch strategisches Ausprobieren können wir die Tabelle auf drei Arten richtig ausfüllen.

D	A	R	N	O
N	O	A	R	D
O	R	N	D	A
R	D	O	A	N
A	N	D	O	R

O	R	A	N	D
D	A	O	R	N
R	D	N	A	O
N	O	R	D	A
A	N	D	O	R

D	A	R	N	O
R	O	A	D	N
O	D	N	R	A
N	R	O	A	D
A	N	D	O	R

Richtige Antwort(en): B, C, E

6. Sieben Zahlenkarten liegen aufgereiht auf einem Tisch in folgender Reihenfolge: 5, 1, 4, 3, 2, 7, 6. In einem Schritt können wir zwei beliebige Zahlenkarten vertauschen. Mindestens wie viele Schritte brauchen wir, um die Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 zu erhalten?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Anfangs befindet sich keine der Karten auf dem richtigen Platz. Da in jedem Schritt nur zwei Karten den Platz wechseln können, benötigen wir, damit 7 Karten auf den richtigen Platz kommen, mindestens 4 Schritte. 3 Schritte sind deshalb nicht genug, da dadurch nur 6 Karten vertauscht werden, also kommen auch nur höchstens 6 Karten auf den richtigen Platz. In vier Schritten können alle Karten passend geordnet werden, zum Beispiel so:

5, 1, 4, 3, 2, 7, 6

Im ersten Schritt vertauschen wir die beiden letzten Karten:

5, 1, 4, 3, 2, 6, 7

Im zweiten Schritt die ersten beiden:

1, 5, 4, 3, 2, 6, 7

Im dritten Schritt vertauschen wir die 5 mit der 2:

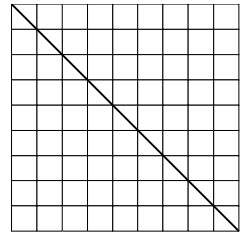
1, 2, 4, 3, 5, 6, 7

Schließlich vertauschen wir im vierten Schritt die 4 mit der 3:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

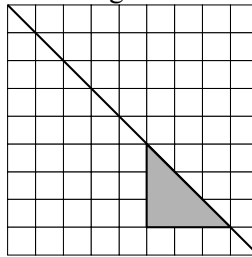
Richtige Antwort(en): B

7. Wir haben eine Diagonale des hier dargestellten 9×9 Gitternetzes eingezeichnet. Wie viele Dreiecke sind insgesamt in dieser Grafik zu sehen, bei denen alle drei Seiten eingezeichnet wurden?



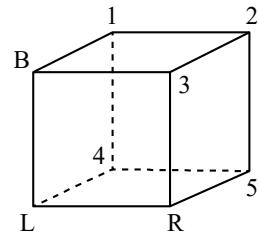
- (A) 2 (B) 72 (C) 81 (D) 90 (E) 100

Lösung: Im 9×9 Gitternetz befinden sich $10 \cdot 10 = 100$ Gitterpunkte. 10 von ihnen befinden sich entlang der eingezeichneten Diagonale. Außer den Gitterpunkten, die sich auf der Diagonale befinden, gehört zu jedem Gitterpunkt genau ein Dreieck, bei dem eine Seite auf der Diagonale und die anderen beiden entlang der Gitterlinien liegen. Weitere Dreiecke sind in dieser Grafik nicht eingezeichnet. Folglich sind insgesamt $100 - 10 = 90$ Dreiecke zu sehen.



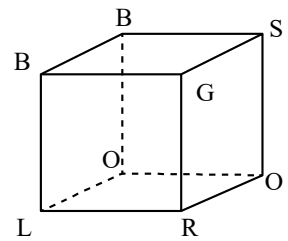
Richtige Antwort(en): D

8. Wir haben die Ecken eines Würfels in jeweils einer der folgenden Farben angemalt: rot, orange, grün, blau, schwarz, lila. Wir wissen, dass zwei Ecken nur dann in derselben Farbe angemalt werden durften, wenn sie durch eine der Kanten verbunden sind. Eine Ameise läuft von einer Ecke des Würfels aus startend stets entlang der Kanten zu den weiteren Ecken des Würfels. Während ihres Weges berührt die Ameise der Reihe nach Ecken mit diesen Farben: blau, lila, rot, grün, schwarz, blau, orange, lila, rot, orange, schwarz, blau, blau. Den Startpunkt in der blauen Ecke haben wir mit B, die als zweites berührte lila Ecke mit L und die darauf folgende rote Ecke mit R in der Grafik markiert. In welcher Farbe haben wir die in der Grafik mit 3 gekennzeichnete Ecke ausgemalt?



- (A) blau (B) lila (C) schwarz (D) grün (E) orange

Lösung: Wir müssen mindestens zwei Ecken blau anmalen. Es muss auch mindestens zwei orangene Ecken geben, denn die orangene Ecke hat grün, lila, rot und schwarz als Nachbarn, was mit nur einer Ecke nicht möglich wäre. Also gibt es jeweils zwei blaue und orangene Ecken und jeweils eine rote, lila, schwarze und grüne Ecke. Die rote Ecke hat neben der lila Ecke auch noch einen grünen und orangen Nachbarn, also ist eine der Ecken 3 und 5 grün und die andere orange. Die blaue Ecke ist mit einer anderen blauen Ecke benachbart, das kann nur Ecke 1 sein. Diese hat wiederum einen schwarzen Nachbarn, wobei es sich nicht um Ecke 4 handeln kann, diese hat nämlich schon grün, blau und orange als Nachbarn, lila kann nicht mehr dazu kommen. Also muss Ecke 2 schwarz sein. Die zwei orangenen Ecken sind benachbart, also sind das die Ecken 4 und 5. So bleibt für die Farbe Grün die Ecke 3 übrig. Anhand der beigefügten Grafik kann überprüft werden, dass die Ameise ihre vorgegebene Route tatsächlich laufen kann. Also stimmt diese Beschriftung des Würfels.



Richtige Antwort(en): D

9. Füllt die folgende Tabelle statt den Buchstaben mit den Zahlen 3, 4, 8, 9, 13 und 14 so aus, dass die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale immer dieselbe ist. Verwendet jede dieser Zahlen genau einmal, in jedem Feld darf nur eine Zahl stehen. Welche Zahl könnte an der Stelle von a stehen?

a	2	b
12	c	d
e	f	7

- (A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 9 (E) 13

Lösung: Die Summe aller Zahlen in der Tabelle beträgt $2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 + 12 + 13 + 14 = 72$. Da $72 : 3 = 24$, muss die Summe aller Zahlen in einer Zeile, Spalte oder Diagonale 24 betragen.

Also ist $a + e = 12 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ e = 3 \end{cases}$ oder $\begin{cases} a = 8 \\ e = 4 \end{cases}$, andere Möglichkeiten passen nicht.

$a + c = 17 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ c = 8 \end{cases}$ oder $\begin{cases} a = 8 \\ c = 9 \end{cases}$

Schließlich erscheinen die folgenden Lösungen möglich:

9	2	13
12	8	4
3	14	7

8	2	14
12	9	3
4	13	7

Aber bei der zweiten Möglichkeit ist die Summe der Nebendiagonale $4 + 9 + 14 = 27$, was nicht den Vorgaben entspricht. So bleibt die erste Annahme bestehen, der Wert von a kann nur 9 betragen.

Richtige Antwort(en): D

10. In einer Schachtel befinden sich insgesamt 100 Kugeln in den Farben rot, grün und blau (jede Kugel ist einfarbig). Die Anzahl der roten Kugeln ist mehr als das Doppelte der grünen Kugeln, das Dreifache der grünen ist mehr als das Vierfache der blauen und das Dreifache der Anzahl der blauen ist mehr als die Anzahl der roten. Genau wie viele Kugeln derselben Farbe könnte es in der Schachtel geben?

(A) 18 (B) 19 (C) 26 (D) 53 (E) 55

Lösung: Wenn die Anzahl der blauen Kugeln 20 ist, dann gibt es mindestens 27 grüne und mindestens 55 rote Kugeln. Das sind zusammen mehr als 100 Kugeln, also müssen es weniger als 20 blaue Kugeln sein.

Wenn die Anzahl der blauen Kugeln höchstens 18 ist, dann gibt es höchstens 53 rote und höchstens 26 grüne Kugeln. Jetzt ist die Anzahl an Kugeln geringer als 100, also muss es mehr als 18 blaue Kugeln geben.

Demnach muss es 19 blaue Kugeln geben. Die Zahl der roten Kugeln ist höchstens 56 und es gibt höchstens 27 grüne Kugeln. Da das Dreifache der grünen Kugeln mehr als das Vierfache der blauen Kugeln ist, muss es mindestens 26 grüne Kugeln geben.

Wenn die Zahl der blauen und grünen Kugeln 19 und 27 ist, dann gibt es $100 - (19 + 27) = 54$ rote Kugeln, aber in diesem Fall wird die Bedingung nicht erfüllt, dass die Anzahl der roten Kugeln mehr als das Doppelte der grünen Kugeln ist.

Wenn die Anzahl der blauen und grünen Kugeln 19 und 26 ist, dann gibt es $100 - (19 + 26) = 55$ rote Kugeln, in diesem Fall ist die Bedingung erfüllt.

In der Box befinden sich also 55 rote, 26 grüne und 19 blaue Kugeln.

Richtige Antwort(en): B, C, E

11. In der hier dargestellten, richtig berechneten Addition von dreistelligen Zahlen stellen unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Ziffern und gleiche Buchstaben gleiche Ziffern dar. Welche Ziffer könnte der Buchstabe C darstellen?

$$\begin{array}{r} ABC \\ + CBA \\ \hline 706 \end{array}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die Summe der beiden dreistelligen Zahlen ist ebenso dreistellig, also muss die Summe der Ziffern an der Hunderterstelle kleiner als 10 sein. So passiert bei der Summe der Ziffern an der Einerstelle, die der Summe an der Hunderterstelle gleicht, bestimmt keine Zehnerüberschreitung, also ist $A + C = 6$. So kann aber $B + B$ nur 10 sein, denn bei der Summe an der Zehnerstelle muss es zu einer Zehnerüberschreitung kommen (nur so ist es möglich, dass die Summe an der Hunderterstelle 7 und nicht 6 ergibt). Daraus folgt, dass $B = 5$ ist. Dass $C + A = 6$ ist, kann erfüllt werden, wenn $A = 2$, $C =$

4 ist oder $A = 4$, $C = 2$ ist, denn A kann nicht 0 sein (eine dreistellige Zahl kann nicht mit 0 beginnen) und falls $A = 1$ ist, müsste C gleich 5 sein, 5 ist aber schon durch B besetzt. A kann auch nicht 3 sein, da in diesem Fall C auch gleich 3 sein müsste, sich hinter unterschiedlichen Buchstaben aber unterschiedliche Zahlen verstecken müssen. Also kann C für 2 oder 4 stehen.

Richtige Antwort(en): B, D

12. Auf dem Markt von Rhodos erhält man für 1 Kuh 4 Hunde und für 1 Pferd 4 Kühe. Wie viele Taler kostet 1 Kuh, wenn 1 Hund, 2 Kühe und 1 Pferd zusammen 100 000 Taler kosten?

(A) 4 000 Taler (B) 8 000 Taler (C) 16 000 Taler
(D) 40 000 Taler (E) 400 000 Taler

Lösung: Da 1 Hund + 2 Kühe + 1 Pferd = 100 000 Taler kosten und man für 1 Pferd 4 Kühe bekommt, sind folglich 1 Hund + 2 Kühe + 4 Kühe = 100 000 Taler, also sind 1 Hund + 6 Kühe = 100 000 Taler.

Wenn 1 Hund und 6 Kühe 100 000 Taler kosten, dann kosten viermal so viele Tiere 400 000 Taler, also kosten 4 Hunde + 24 Kühe = 400 000 Taler.

Aber 4 Hunde sind eine Kuh wert, so können wir auch sagen:

1 Kuh + 24 Kühe = 400 000 Taler, also kosten 25 Kühe = 400 000 Taler.

Wenn 25 Kühe 400 000 Taler kosten, dann ist der Preis für 1 Kuh 25-mal geringer, also kostet eine Kuh $400\,000 : 25 = 16\,000$ Taler.

Richtige Antwort(en): C

13. Bei einer fünfköpfigen Freundesgruppe trifft auf jede Person zu, dass sie entweder klug oder dumm ist. Die Klugen sagen immer die Wahrheit, die Dummen lügen immer. Die Mitglieder der Freundesgruppe sind A, B, C, D und E.

(1) A sagt: B ist dumm.

(2) C sagt: D ist klug.

(3) E sagt: A ist nicht klug.

(4) B sagt: C ist klug.

(5) D sagt: A und E haben unterschiedliche Eigenschaften.

Wer aus dem Freundeskreis ist klug?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

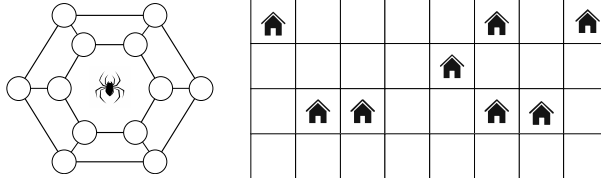
Lösung: Nehmen wir an, dass A klug ist. Dann wäre B dumm (1), C dumm (4), D dumm (2) und E klug (5), aber laut (3) ist A dumm, was ein Widerspruch ist. Also muss A dumm sein. Daraus folgt, dass B klug (1), C klug (4), D klug (2) und E klug (5) sind.

Richtige Antwort(en): B, C, D, E

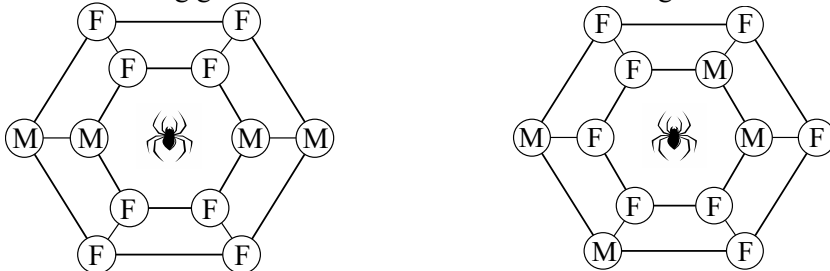
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. a) Die Spinne hat im hier dargestellten Netz die in den Knotenpunkten gefangenen Insekten eingesammelt. Es stellte sich heraus, dass in jedem Knotenpunkt nur eine Fliege oder Mücke war und jedes beliebige Insekt genau zwei Fliegen als Nachbarn hatte. (Zwei Insekten sind benachbart, wenn zwischen den zwei Knotenpunkten eine Linie eingezeichnet ist.) Zeichnet eine Lösung, bei der ihr die Positionen der Insekten im Spinnennetz markiert! Schreibt in solche Knotenpunkte, in denen Fliegen sind, ein F und in die Knotenpunkte mit Mücken ein M!

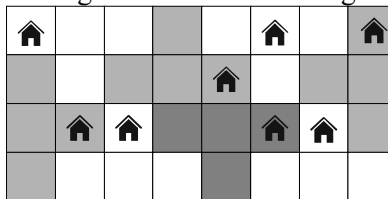
b) Teilt die Grafik rechts entlang der Gitterlinien in 8 Stücke, die die gleiche Form und gleiche Größe haben, sodass in jedem Stück 1 Häuschen steht!



Lösung: Unterhalb sind zwei mögliche richtige Lösungen dargestellt. Für maximal ein richtig gezeichnetes Netz können 8 Punkte vergeben werden.



Unterhalb ist für die rechte Aufgabe eine mögliche Lösung dargestellt. Für maximal eine richtige Lösung können 8 Punkte vergeben werden.



7. Klasse / 7. Schulstufe

1. Die Summe von acht Zahlen beträgt 2025. Unter den acht Summanden befand sich auch 998. Welchen Wert erhalten wir als Summe, wenn wir 998 gegen 899 tauschen?

(A) 1916 (B) 1925 (C) 1926 (D) 1935 (E) 1936

Lösung: Da der Wert der Summanden durch den Tausch um $998 - 899 = 99$ sinkt, muss auch die Summe um 99 weniger werden, $2025 - 99 = 1926$.

Richtige Antwort(en): C

2. Welche der vier Grundrechenarten lassen sich anstelle des Dreiecks schreiben, damit die Gleichung $4\Delta \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ erfüllt wird?

(A) Addition (B) Subtraktion (C) Multiplikation (D) Division
(E) Keine der Möglichkeiten erfüllt die Gleichung.

Lösung: Wenn wir die vier Grundrechenarten überprüfen, erkennen wir, dass die Gleichung durch Subtraktion und Division erfüllt wird:

$$4 + \frac{4}{5} = \frac{20}{5} + \frac{4}{5} = \frac{24}{5} \neq \frac{16}{5}; \quad 4 - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} - \frac{4}{5} = \frac{16}{5};$$

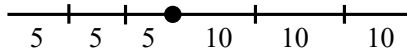
$$4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}; \quad 4 : \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \neq \frac{16}{5}.$$

Richtige Antwort(en): B, C

3. Ich habe einen 15 cm langen und einen 30 cm langen Draht an einem Ende zusammengelötet. Wie viele cm könnte der Drittelungspunkt von einem Draht von dem Drittelungspunkt des anderen Drahtes entfernt sein, wenn die Menge des Lötmaterials vernachlässigbar ist?

(A) 15 cm (B) 20 cm (C) 25 cm (D) 30 cm (E) 35 cm

Lösung: Die Drittelungspunkte sind dann am nächsten, wenn die zwei Drähte zum Beispiel gebogen sind und sich beim Lötgen genau am Drittelungspunkt berühren. In diesem Fall beträgt der Abstand 0 cm (siehe Grafik links).



Am weitesten entfernt sind sie voneinander, wenn beide Drähte gerade sind und sich so gegenseitig verlängern. In diesem Fall beträgt der Abstand zwischen den Drittelungspunkten $10 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$ (siehe Grafik in der Mitte). Zwischen diesen Werten, also den Abständen zwischen 0 cm und 30

cm, kann jeder mögliche Abstand eingestellt werden, wir müssen die Drähte nur passend biegen (siehe Grafik rechts).

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

4. Wir nennen ein Eishockeymatch „spannend“, wenn während dem Spiel keine der Mannschaften um mehr als ein Tor in Führung liegt. Einmal wurden bei dem Ungarn-Japan-Match 11 Tore erzielt. In insgesamt wie vielen unterschiedlichen Reihenfolgen könnten die Tore erfolgt sein, wenn das Spiel „spannend“ war? (Zwei Reihenfolgen sind unterschiedlich, wenn es in der einen Reihenfolge ein chronologisch nummeriertes Tor gibt, das nicht dieselbe Mannschaft erzielt hat wie in der anderen Reihenfolge.)

(A) 11 (B) 32 (C) 48 (D) 64 (E) 121

Lösung: Nach den ersten zwei Toren steht es entweder 2-0 oder 1-1, laut Aufgabenstellung ist jedoch nur letzteres möglich.

Nach den nächsten zwei Toren könnte es entweder 3-1 oder 2-2 stehen, es ist aber wieder nur die zweite Möglichkeit erlaubt.

So kann man die Tore in Zweiergruppen ordnen und sagen, dass jede Mannschaft in einer Zweiergruppe genau 1 Tor erzielen muss, damit das Spiel spannend ist, und jede Reihenfolge, die auf diese Art aufgebaut ist, eine passende ist.

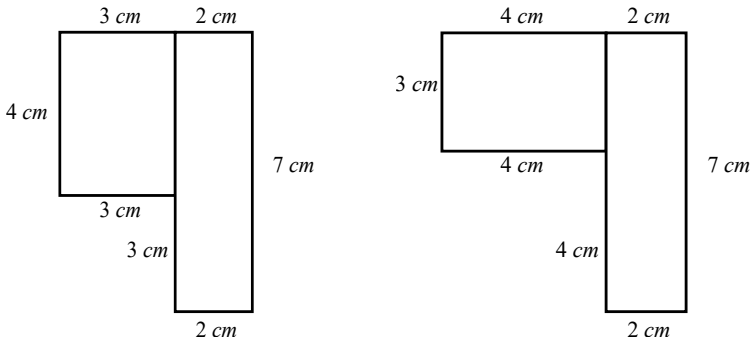
In jeder beliebigen Zweiergruppe gibt es zwei unterschiedliche Abfolgen, in denen Tore erzielt werden können. Das letzte, 11. Tor kann sowohl die eine, als auch die andere Mannschaft schießen, also gibt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ unterschiedliche Reihenfolgen.

Richtige Antwort(en): D

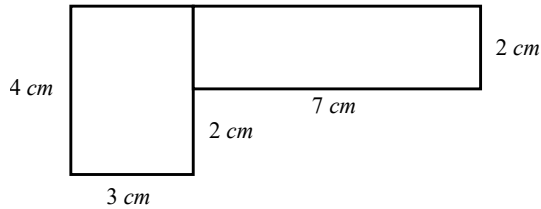
5. Bibi verbindet ein $4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ Rechteck und ein $2 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ Rechteck ohne Überlappungen miteinander, sodass sie ein Sechseck erhält. Wie viele cm könnte der Umfang dieses Sechsecks betragen?

(A) 24 cm (B) 25 cm (C) 26 cm (D) 27 cm (E) 28 cm

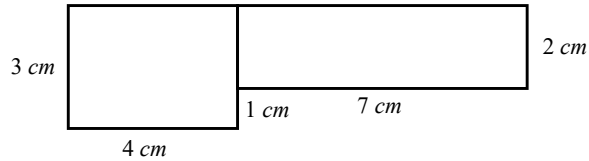
Lösung: Ohne Überlappungen konnte sie die Rechtecke auf die folgenden vier Arten zu einem Sechseck verbinden:



$$U = (3 + 2 + 7 + 2 + 3 + 3 + 4) = 24 \text{ cm} \quad U = (4 + 2 + 7 + 2 + 4 + 4 + 3) = 26 \text{ cm}$$



$$U = (3 + 7 + 2 + 7 + 2 + 3 + 4) = 28 \text{ cm}$$



$$U = (4 + 7 + 2 + 7 + 1 + 4 + 3) = 28 \text{ cm}$$

Richtige Antwort(en): A, C, E

6. Auf einer Insel leben zwei Clans. In dem einen Clan leben nur Menschen, die immer die Wahrheit sagen, im anderen lügen die Mitglieder immer. Eines Tages sitzen 12 Inselbewohner an einem runden Tisch. Jeder von ihnen sagt, dass seine beiden Sitznachbarn zum selben Clan gehören. Genau wie viele Lügner könnten am Tisch sitzen?
- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 10

Lösung: Wenn gar keine Lügner am Tisch sitzen, dann sagen alle die Wahrheit, wenn sie meinen, dass ihre beiden Nachbarn aus demselben Clan stammen. Sobald sich Lügner unter ihnen befinden, sitzen neben dem Lügner zwei Personen aus unterschiedlichen Clans. Die Nachbarn von L sind folglich L und E (mit L bezeichnen wir Lügner, mit E ehrliche Personen, die die Wahrheit sagen). Es ist leicht ersichtlich, dass sich diese LLE-Dreiergruppe wiederholen wird. Dann sind unter den 12 Inselbewohnern 8 Lügner und 4 Ehrliche.

Richtige Antwort(en): A, D

7. Wenn eine Wassermelone so viel wiegt wie 3 kg und eine halbe Wassermelone zusammen, wie viel wiegen dann 4 Wassermelonen?
- (A) 6 kg (B) 12 kg (C) 16 kg (D) 20 kg (E) 24 kg

Lösung: Dass „eine Wassermelone so viel wiegt wie 3 kg und eine halbe Wassermelone zusammen“, können wir auch so formulieren: „zwei halbe Wassermelonen = 3 kg und eine halbe Wassermelone zusammen“, woraus leicht ersichtlich ist, dass eine halbe Wassermelone 3 kg wiegt. Daraus folgt, dass eine ganze 6 kg wiegt. Deshalb wiegen 4 Melonen $4 \cdot 6 \text{ kg} = 24 \text{ kg}$.

Richtige Antwort(en): E

8. In die Felder einer 5×5 Tabelle sollen wir die Buchstaben A, N, D, O, R so hineinschreiben, dass jeder Buchstabe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale genau einmal vorkommt. Einige Buchstaben habe ich bereits eingetragen. Füllt die Tabelle fertig aus! Welcher Buchstabe könnte im dunklen Feld stehen, wenn in jedem Feld nur ein Buchstabe stehen darf?

				N
A	N	D	O	R

- (A) A (B) N (C) D (D) O (E) R

Lösung: Durch strategisches Ausprobieren können wir die Tabelle wie folgt auf zwei Arten ausfüllen:

D	O	R	A	N
O	A	N	R	D
N	R	O	D	A
R	D	A	N	O
A	N	D	O	R

D	O	R	A	N
R	A	N	D	O
N	D	O	R	A
O	R	A	N	D
A	N	D	O	R

Richtige Antwort(en): C, E

9. Der Code eines Tresorschlosses besteht aus einer fünfstelligen Zahl.
 (1.) Die Ziffer an der vierten Stelle ist um 4 größer als die Ziffer an der zweiten Stelle.
 (2.) Die Ziffer an der dritten Stelle ist um 3 kleiner als die Ziffer an der zweiten Stelle.
 (3.) Die erste Ziffer ist das Dreifache der letzten Ziffer.
 (4.) Unter den Ziffern befinden sich drei Paare, bei denen die Summe der zwei Ziffern 11 ergibt.

Welche dieser Ziffern könnten sich unter den Ziffern des Codes befinden?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die zweite, dritte und vierte Ziffer können aufgrund der Bedingungen aus (1.) und (2.) $(3, 0, 7)$, $(4, 1, 8)$ oder $(5, 2, 9)$ sein.

Die laut der (4.) Bedingung möglichen Zahlenpaare sind: $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$. Dies können wir nur erfüllen, wenn die zweite, dritte und vierte Ziffer $(5, 2, 9)$ lauten.

Wegen (3.) müssen die erste und letzte Ziffer $(3, 1)$, $(6, 2)$ oder $(9, 3)$ lauten. Von diesen erfüllt nur $(6, 2)$ zusammen mit $(5, 2, 9)$ die (4.) Bedingung. Somit lautet der fünfstellige Code: 65292.

Richtige Antwort(en): C, E

10. Die Schrittmacher-Operation macht aus einem Zahlentripel (a, b, c) ein neues Zahlentripel, indem sie beliebige zwei der drei Zahlen um 1 erhöht und die dritte um 1 verringert. Welche der folgenden Zahlentripel könnten wir durch die Anwendung solcher Schrittmacher-Operationen aus dem Tripel $(2, 3, 4)$ erhalten?
- (A) $(3, 4, 5)$ (B) $(4, 4, 4)$ (C) $(4, 3, 5)$ (D) $(5, 4, 3)$ (E) $(4, 5, 3)$

Lösung: Ein Schritt erhöht die Summe des Zahlentripels um 1. Diese Summe beträgt bei allen fünf Antwortmöglichkeiten 12, während die Summe des anfänglichen $(2, 3, 4)$ Zahlentripels 9 beträgt. Also braucht es drei Schritte, um die Zustände in den Antwortmöglichkeiten zu erreichen, sofern dies überhaupt möglich ist.

$(2, 3, 4) \rightarrow (1, 1, -1) \rightarrow (1, -1, 1) \rightarrow (-1, 1, 1) \rightarrow (3, 4, 5)$. Hier habe ich dargestellt, welche Zahl des Tripels im jeweiligen Schritt um 1 vermehrt oder verringert wird, um auf das Endergebnis zu kommen.

$(2, 3, 4) \rightarrow (1, 1, -1) \rightarrow (1, -1, 1) \rightarrow (1, 1, -1) \rightarrow (5, 4, 3)$.

Also kann man den Zustand in (A) und (D) über die Schrittmacher-Operation erreichen.

$(2, 3, 4) \rightarrow (4, 4, 4)$ kann nicht erreicht werden, da jeder Schritt die Parität der Zahlen verändert, also ob sie gerade oder ungerade sind. Nach drei Schritten muss an der Stelle der 4 eine ungerade Zahl stehen, also kann es sich dabei nicht wieder um die 4 handeln. Wenn wir die Parität untersuchen, sehen wir, dass auch die folgenden Tripel wegen einer ähnlichen Begründung nicht in drei Schritten erreicht werden können (aus der 2 kann keine 4 werden): $(2, 3, 4) \rightarrow (4, 3, 5)$ und $(2, 3, 4) \rightarrow (4, 5, 3)$.

Richtige Antwort(en): A, D

11. Um einen Tisch herum sitzen nur Mädchen und Jungen. Von den Kirschen auf dem Tisch nimmt sich jeder Junge 10, während die Mädchen um 2 weniger Kirschen als ihr linker Nachbar nehmen, falls dieser linke Nachbar ein Junge ist, und um 2 mehr Kirschen nehmen, falls der linke Nachbar ein Mädchen ist. Insgesamt wurden 222 Kirschen gegessen. Wie viele Mädchen könnten am Tisch gegessen haben?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Wenn nur Jungs am Tisch sitzen, endet die Zahl der verspeisten Kirschen auf 0.

Wenn 1 Mädchen am Tisch sitzt, isst sie 8 Kirschen, also wird auch die Zahl der gegessenen Kirschen auf 8 enden.

Wenn 3 Mädchen am Tisch sitzen, können sie sich auf drei unterschiedliche

Arten positionieren. Wenn alle drei Mädchen direkt nebeneinander sitzen, essen sie der Reihe nach 8, 10, 12 Kirschen, so endet die Zahl der mit den Jungs zusammen verspeisten Kirschen auf 0. Wenn zwei Mädchen nebeneinander sitzen und das dritte Mädchen zwischen zwei Jungs sitzt, dann essen die Mädchen 8, 10, 8 Kirschen, so endet die Gesamtzahl der gegessenen Kirschen auf 6. Wenn schließlich keines der Mädchen neben einem anderen Mädchen sitzt, essen sie 8, 8, 8 Kirschen und die Gesamtsumme endet auf 4. Daher ist (A) keine richtige Antwort.

Wenn es 4 Mädchen gibt und sie vereinzelt sitzen, also immer zwischen zwei Jungen, dann essen die Mädchen zusammen $4 \cdot 8 = 32$ Kirschen. Wenn es 19 Jungs gibt, dann werden insgesamt 222 Kirschen gegessen.

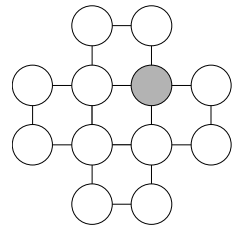
Es können auch 222 Kirschen gegessen werden, wenn es 5 Mädchen gibt. Wenn sie in der Reihenfolge JMMMMJMJ sitzen (J steht für Junge, M für Mädchen), dann essen die vier nebeneinander sitzenden Mädchen 8, 10, 12, 14 Kirschen und das fünfte, getrennt sitzende Mädchen 8 Kirschen, das sind zusammen 52 Kirschen. Wenn am Tisch 17 Jungen sitzen, werden insgesamt 222 Kirschen gegessen.

Daraus folgt, dass die Lösung für 6 Mädchen JMMMMJMMJ ist. Dann ist die Anzahl der Kirschen der Mädchen: 8, 10, 12, 14 und 8, 10.

Bei 7 Mädchen ist die Zahl der Kirschen, die von den Mädchen gegessen werden, wenn sie in einer 2-2-2-1 Reihenfolge sitzen (JMMJMMJMMJMJ), gleich 18, 18, 18, 8.

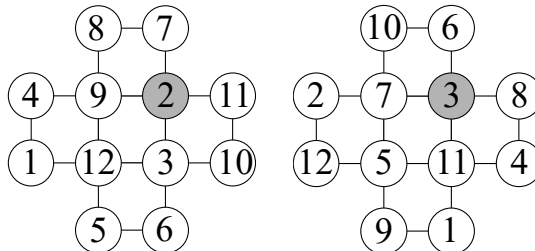
Richtige Antwort(en): B, C, D, E

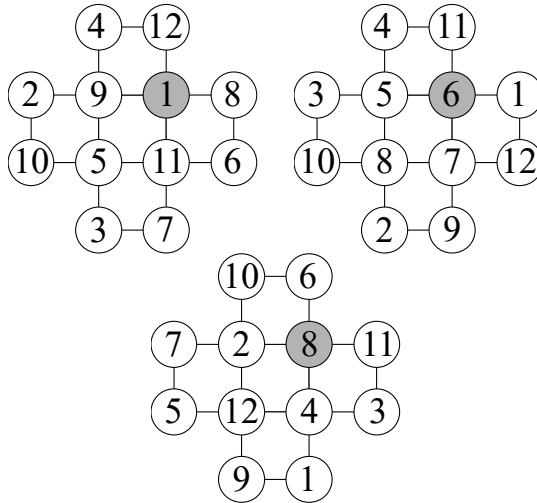
12. Andi schrieb die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 in die Kreise der Grafik, sodass in jedem Kreis eine andere Zahl steht und jeweils die Summe der vier Zahlen in den Ecken jedes der Quadrate immer 26 ergibt. Welche der untenstehenden Zahlen könnten im grauen Kreis stehen?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8

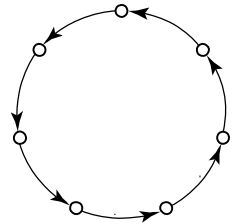
Lösung: Wie wir unterhalb sehen können, sind alle Antwortmöglichkeiten realisierbar:





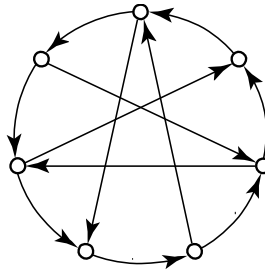
Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

13. Die hier dargestellte Grafik zeigt 7 Städte entlang einer Kreislinie. Die Pfeile zeigen an, von welcher Stadt man in welche fliegen kann. Mit wie vielen neuen Fluglinien (ohne Rückflugmöglichkeit) kann erreicht werden, dass man von jeder der sieben Städte in jede andere fliegen kann und höchstens zweimal umsteigen muss? Überprüft die folgenden Antwortmöglichkeiten!



- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

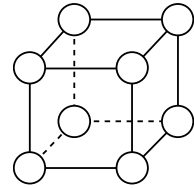
Lösung: Hier sehen wir eine passende Lösung für die Einrichtung von 5 neuen Fluglinien. Somit kann unser Ziel natürlich auch mit mehr als 5 Fluglinien erreicht werden.



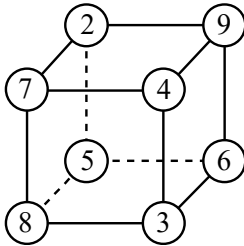
Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

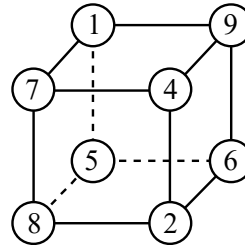
14. Schreibt in die Ecken dieses Würfels jeweils eine Zahl von 1-9 (es darf keine Zahl mehrmals verwendet werden, eine Zahl bleibt übrig), sodass die Summe der vier Zahlen auf einer Seitenfläche für alle Seitenflächen dieselbe ist! Findet alle möglichen Lösungen! Zwei Lösungen sind unterschiedlich, wenn unterschiedliche Zahlen übrigbleiben.



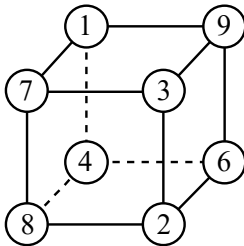
Lösung: Da die Summen auf den sechs Seitenflächen gleich sein müssen, wird jede der aufgeschriebenen Zahlen, wenn wir die sechs gleichen Zahlen addieren, dreimal zu dieser Summe beitragen (da jede Zahl auf 3 Seitenflächen vorkommt). Demnach können wir nur ungerade Zahlen von den neun Zahlen auslassen.



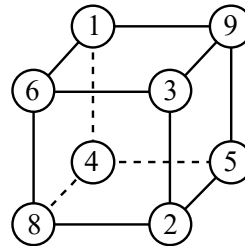
Lassen wir die Zahl 1 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 22.



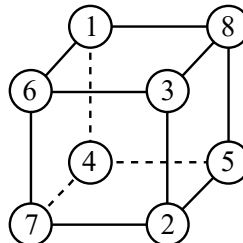
Lassen wir die Zahl 3 aus, ist diese Summe gleich 21.



Lassen wir die Zahl 5 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 20.



Lassen wir die Zahl 7 aus, ist diese Summe gleich 19.



Lassen wir die Zahl 9 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 18.

Eine richtige Lösung ist 3 Punkte, zwei richtige Lösungen sind 6 Punkte, drei richtige Lösungen 9 Punkte, vier richtige Lösungen 12 Punkte und fünf richtige Lösungen 16 Punkte wert.

8. Klasse / 8. Schulstufe

1. In der Addition $AB + AB + AB = CA$ bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Ziffern (AB und CA sind jeweils zweistellige Zahlen). Für welche Ziffern könnte somit C stehen?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Lösung: Es ist ersichtlich, dass die Summe für Werte von A , die größer oder gleich 4 sind, mindestens 120 ist, da wir Zahlen addieren, die größer oder gleich 40 sind. Wenn der Wert von A gleich 3 ist, dann endet die Summe auf 3 und es darf bei der Einerstelle nicht zum Zehnerübergang kommen, da ansonsten das Ergebnis größer würde als 100, was keine zweistellige Zahl ist. So muss der Wert von $B + B + B$ gleich 3 sein, woraus folgt $B = 1$. Dann ist $31 + 31 + 31 = 93$ eine mögliche Schreibweise, so kann der Wert von C gleich 9 sein.

Der Wert von A kann nur noch 1 oder 2 betragen. Lasst uns überprüfen, ob diese Werte möglich sind!

Wenn $A = 1$ ist, dann endet die Summe $B + B + B$ nur dann auf 1, wenn $B = 7$. Überprüfen wir dies, dann ist $17 + 17 + 17 = 51$ tatsächlich auch eine mögliche Schreibweise, also kann der Wert von C auch 5 betragen.

Wenn schließlich $A = 2$ ist, dann endet die Summe $B + B + B$ nur dann auf 2, wenn $B = 4$ ist. Da $24 + 24 + 24 = 72$, kann der Wert von C auch 7 betragen.

Richtige Antwort(en): C, D, E

2. Wenn für die positiven ganzen Zahlen a, b, c gilt: $ab = 20$ und $bc = 16$, wie viel könnte dann der Wert der Summe $a + b + c$ betragen?

(A) 13 (B) 16 (C) 20 (D) 36 (E) 37

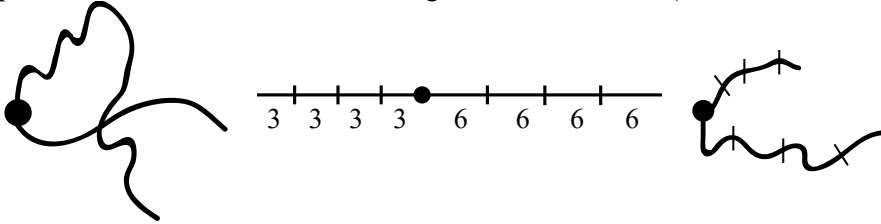
Lösung: Wegen $ab = 20$ und $bc = 16$ kann der Wert von a gleich 5, 10 oder 20 sein. (Wenn der Wert von a 1, 2 oder 4 wäre, müsste b ein Vielfaches von 5 sein, aber so könnte bc nicht 16 sein.) Für diese Möglichkeiten berechnen wir die Werte für b und c . Die erhaltenen Lösungen (a, b, c) sind $(5, 4, 4)$, $(10, 2, 8)$, $(20, 1, 16)$, also kann der Wert von $a + b + c$ gleich 13, 20 oder 37 sein.

Richtige Antwort(en): A, C, E

3. Ich habe einen 12 cm langen und einen 24 cm langen Draht an einem Ende zusammengelötet. Wie viele cm könnte der Viertelungspunkt von einem Draht von dem Viertelungspunkt des anderen Drahtes entfernt sein, wenn die Menge des Lötmaterials vernachlässigbar ist?

(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 21 cm (D) 27 cm (E) 30 cm

Lösung: Die Viertelungspunkte sind sich dann am nächsten, wenn die zwei Drähte zum Beispiel gebogen sind und sich beim Lötén genau am Viertelungspunkt berühren. In diesem Fall beträgt der Abstand 0 cm (siehe Grafik links).



Am weitesten entfernt sind sie voneinander, wenn beide Drähte gerade sind und sich so gegenseitig verlängern. In diesem Fall beträgt der Abstand zwischen den Viertelungspunkten $9\text{ cm} + 18\text{ cm} = 27\text{ cm}$ (siehe Grafik in der Mitte). Zwischen diesen Werten, also den Abständen zwischen 0 cm und 27 cm , kann jeder mögliche Abstand eingestellt werden, wir müssen die Drähte nur passend biegen (siehe Grafik rechts).

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

4. Andreas, Bernd und Caspar spielen Wettrennen. Nach jedem Rennen verdoppelt das Kind auf dem letzten Platz die Ersparnisse des Erstplatzierten, indem es Geld an ihn zahlt. Am Anfang hatte Andreas 55, Bernd 30 und Caspar 35 Euro. Mindestens wie viele Rennen haben sie durchgeführt, wenn zum Schluss alle drei Kinder gleich viel Geld hatten? (Während dem Wettbewerb erhielt niemand Geld von irgendwo anders und gab auch kein Geld aus.)
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Da die gesamte Geldsumme $55 + 30 + 35 = 120$ Euro ist, wird zum Schluss jedes Kind 40 Euro haben. Deshalb wird vor der letzten Runde jemand 20, jemand 40 und jemand 60 Euro gehabt haben. Diesen Zustand können wir nicht sofort aus dem Anfangszustand erhalten, da sich nach einer Runde das Vermögen von mindestens einer Person nicht verändert, aber die Mengen $\{30, 35, 55\}$ und $\{20, 40, 60\}$ keine gemeinsamen Elemente haben.

Deshalb sind mindestens drei Rennen nötig.

In drei Rennen kann auch erreicht werden, dass jedes Kind gleich viel Geld besitzt: Zuerst verdoppelt Andreas das Vermögen von Caspar (Stand: 20, 30, 70), dann verdoppelt Caspar das Vermögen von Bernd (20, 60, 40), schließlich verdoppelt Bernd das Geld von Andreas, dadurch ergibt sich das Endergebnis von 40, 40, 40.

Richtige Antwort(en): B

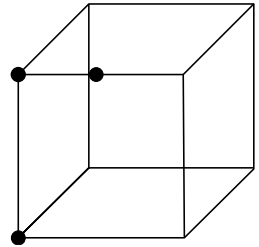
5. Auf einer Uhr bilden der Minuten- und der Stundenzeiger gerade einen rechten Winkel. Wie viel Grad könnte der Winkel messen, den diese Zeiger 3 Stunden später einschließen?

- (A) 0° (B) 60° (C) 90° (D) 120° (E) 180°

Lösung: In 3 Stunden legt der Minutenzeiger 3 vollständige Umdrehungen zurück, also wird er sich in derselben Position befinden wie zu Anfang. Der Stundenzeiger dreht sich in 3 Stunden um 90° . So können sich die beiden Zeiger, je nach Startposition, nach 3 Stunden entweder verdecken (Startzeitpunkt 9:00, nach 3 Stunden: 12:00), also einen Winkel von 0° einschließen, oder sich genau gegenüberstehen und in entgegengesetzte Richtungen zeigen (Startzeitpunkt 3:00, nach 3 Stunden: 6:00), in diesem Fall beträgt der Winkel 180° .

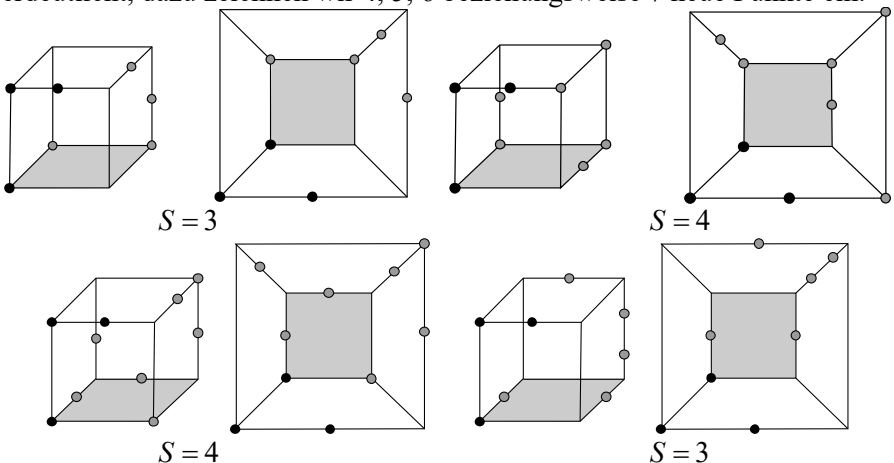
Richtige Antwort(en): A, E

6. An den Kanten eines Würfels haben wir 3 Punkte, wie in der Grafik zu sehen ist, markiert. Wir haben mit derselben Farbe weitere Punkte auf den Kanten markiert, sodass auf jeder Seitenfläche des Würfels gleich viele farbige Punkte entstanden sind. Abgesehen von den 3 gefärbten Punkten am Anfang: Insgesamt wie viele farbige Punkte könnten wir zusätzlich eingezeichnet haben?



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Es sei die Zahl der Punkte auf je einer Seitenfläche des Würfels mit S bezeichnet. Die Zahl der bunten Punkte in den Ecken des Würfels sei c , die bunten Punkte auf den Kanten des Würfels e . Wenn wir die bunten Punkte auf den jeweiligen Seitenflächen zählen und diese addieren, kommen wir auf die Gleichung $6S = 3c + 2e$. Wegen der ursprünglichen drei Punkte gilt $S \geq 3$. Für $S = 3$ und $S = 4$ gibt es passende Lösungen, diese werden in der Grafik verdeutlicht, dazu zeichnen wir 4, 5, 6 beziehungsweise 7 neue Punkte ein.



3 neue Punkte ergeben auch keine passende Lösung. Wenn die Verteilung der neuen Punkte auf die Ecken und Kanten wie folgt ist:

$(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$, dann ist (unter Berücksichtigung der ursprünglichen 3 Punkte) $6S = 3c + 2e$ der Reihe nach gleich 17, 16, 15, 14. Von diesen Werten ist keiner durch 6 teilbar.

Richtige Antwort(en): B, C, D, E

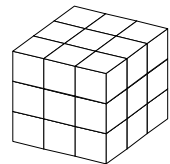
7. Auf einem Tisch liegen 19 Metallkugeln, deren Masse der Größe nach geordnet 1, 2, 3, ..., 19 Gramm beträgt. Von diesen Kugeln sind 9 aus Eisen, 9 aus Bronze und eine aus Gold. Die Masse der Eisenkugeln beträgt zusammen um 87 Gramm mehr als die Gesamtmasse der Bronzekugeln. Wie viele Gramm kann die Goldkugel haben?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 13

Lösung: Die Masse der 9 leichtesten Kugeln beträgt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ Gramm und die Masse der 9 schwersten Kugeln $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$ Gramm, was um $9 \cdot 10 = 90$ Gramm mehr ist als die Gesamtmasse der 9 leichtesten Kugeln. Der Massenunterschied zwischen den Eisen- und den Bronzekugeln ist höchstens 90 Gramm. Diesen Wert kann ich um 3 auf 87 Gramm verringern, wenn ich die 7 auf 10 erhöhe oder die 13 auf 10 verringere, oder ich erhöhe 9 auf 11 und reduziere 11 auf 10, andere Optionen gibt es nicht. Im ersten Fall ist die Goldkugel 7 Gramm, im zweiten Fall 13 Gramm und im dritten Fall 9 Gramm.

Richtige Antwort(en): A, C, E

8. In der Grafik ist ein $3 \times 3 \times 3$ Würfel aus 27 kleinen Würfeln zu sehen. In jeden kleinen Würfel schreiben wir die Zahl, die verrät, mit wie vielen Würfeln dieser benachbart ist. (Zwei Würfel sind benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seitenfläche haben.) Marcel hat die 27 Zahlen addiert, sich aber um 1 verrechnet. Was könnte Marcel als Ergebnis erhalten haben?



- (A) 105 (B) 106 (C) 107 (D) 108 (E) 109

Lösung: Betrachten wir die Zahlen im Würfel schichtweise:

3	4	3
4	5	4
3	4	3

In der unteren Schicht ist die Summe: 33

4	5	4
5	6	5
4	5	4

in der mittleren Schicht: 42

3	4	3
4	5	4
3	4	3

in der oberen Schicht: 33

Somit ist die Summe der 27 Zahlen $33 + 42 + 33 = 108$. Da er sich um 1 geirrt hat, konnte Marcel die Zahl 107 oder 109 erhalten.

Richtige Antwort(en): C, E

9. Peter malte in einige Felder der 3×3 Tabelle, die in der Abbildung dargestellt ist, einige Punkte. Anschließend addierte er die Zahl der Punkte jeweils für jede Zeile und jede Spalte korrekt zusammen. Für alle sechs Rechnungen erhielt er voneinander verschiedene Ergebnisse. Wie viele Punkte könnte Peter insgesamt in die Tabelle gemalt haben? Überprüft die untenstehenden Möglichkeiten!

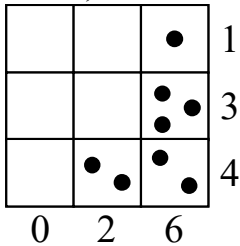
- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Lösung: Da alle sechs Ergebnisse unterschiedlich sind, muss die Summe der sechs Ergebnisse mindestens $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ betragen.

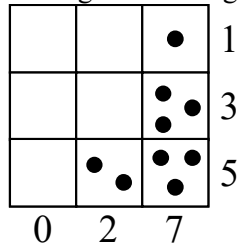
Wenn wir jedoch die Summe der drei Summen pro Zeile mit der Summe der drei Summen pro Spalte vergleichen, müssten wir beide Male dieselbe Summe erhalten, da wir in beiden Fällen dieselben 9 Zahlen addiert haben. Die Summe von zwei gleichen Zahlen muss jedoch gerade sein, daher ist die kleinste Summe der Punkte nicht 15, sondern 16. So kann die Zahl der eingezeichneten Punkte nicht weniger als die Summe der jeweils in den Zeilen eingezeichneten Punkten sein, was gleich $16:2 = 8$ ist.

Also sind die Antwortmöglichkeiten (A) und (B) nicht richtig.

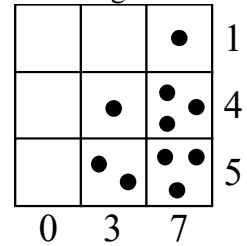
Unterhalb sehen wir jeweils eine richtige Lösung für die Möglichkeiten, dass Peter 8, 9 oder 10 Punkte der Aufgabenstellung entsprechend eingezeichnet hat.



insgesamt 8 Punkte



insgesamt 9 Punkte



insgesamt 10 Punkte

Richtige Antwort(en): C, D, E

10. Ich habe 4 unterschiedliche ganze Zahlen in mein Heft geschrieben. Anschließend habe ich immer zwei von diesen Zahlen ausgewählt, die Summe und das Produkt dieser Zahlen berechnet und auf die Tafel geschrieben. Ich habe das so lange gemacht, bis ich alle möglichen Kombinationen der zwei gewählten Zahlen verwendet habe. Genau wie viele unterschiedliche Zahlen könnte ich so auf die Tafel geschrieben haben? Überprüft die untenstehenden Möglichkeiten!

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: Wir berechnen insgesamt 6 Summen und 6 Produkte, das sind 12 Zahlen. Wir zeigen, dass es unter ihnen mindestens 6 unterschiedliche Zahlen gibt. Sind die vier Zahlen $a < b < c < d$, dann sind unter den Summen mindestens 5 verschiedene, denn: $a + b < a + c < a + d < b + d < c + d$. Wir zeigen, dass sich dann unter den Produkten entweder eine Zahl befindet, die größer ist als $c + d$ oder kleiner ist als $a + b$.

Wenn $a \geq 0$, dann ist $b \geq 1$, $c \geq 2$, $d \geq 3$, somit gilt $cd \geq 2d > c + d$.

Wenn $a < 0$ und $d \geq 2$, dann gilt $ad \leq 2a < a + b$.

Wenn $a < 0$ und $d \leq 1$, dann gilt $c \leq 0$, $b \leq -1$, $a \leq -2$, und $ab \geq 2 > c + d$.

Also ist die Antwortmöglichkeit (A) nicht richtig.

Wenn die vier Zahlen -1, 0, 1, 2 sind, dann kommen 6 unterschiedliche Zahlen auf die Tafel: -2, -1, 0, 1, 2 und 3.

Wenn die vier Zahlen 0, 1, 2, 3 sind, dann kommen 7 unterschiedliche Zahlen auf die Tafel: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Wenn die vier Zahlen 0, 1, 2, 4 sind, dann kommen 8 unterschiedliche Zahlen auf die Tafel: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8.

Wenn die vier Zahlen 1, 2, 3, 5 sind, dann kommen 9 unterschiedliche Zahlen auf die Tafel: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15.

Richtige Antwort(en): B, C, D, E

11. Marcel zeichnet auf eine Ebene 10 Punkte so, dass keine drei von diesen Punkten auf einer Geraden liegen. Anschließend zeichnet er eine Gerade, die keinen der konstruierten Punkte enthält. Schließlich verbindet er alle Punkte jeweils paarweise durch eine Strecke. Genau mit wie vielen dieser Strecken kann die Gerade einen Schnittpunkt haben?

(A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

Lösung: Auf einer Seite der Geraden liegen a , auf der anderen Seite b Punkte, wobei $a + b = 10$. Die Gerade schneidet diejenigen Strecken, die zwei Punkte auf den gegenüberliegenden Seiten miteinander verbinden. Die Anzahl solcher Strecken beträgt $a \cdot b$. Die möglichen Zahlenpaare (a, b) lauten: (10, 0), (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4), (5, 5). Die passenden Produkte $a \cdot b$ sind der Reihe nach: 0, 9, 16, 21, 24, 25. Also kann die Zahl der Schnittpunkte 0, 9, 16, 21, 24 oder 25 betragen.

Richtige Antwort(en): A, D, E

12. Über eine vierstellige Zahl auf der Tafel kennen wir die folgenden drei Aussagen:

- (1) Unter den Ziffern der Zahl befinden sich die Ziffern 1, 4 und 5.
- (2) Unter den Ziffern der Zahl befinden sich die Ziffern 1, 5 und 9.
- (3) Unter den Ziffern der Zahl befinden sich die Ziffern 7, 8 und 9.

Von diesen drei Aussagen sind nur zwei wahr. Welche der untenstehenden Ziffern könnten dann in unserer Zahl vorkommen?

- (A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

Lösung: Eine Aussage ist falsch. Sehen wir uns die Möglichkeiten der Reihe nach an!

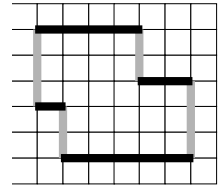
Wenn (1) falsch ist, dann sind (2) und (3) wahr, also müssten wir in unserer vierstelligen Zahl die Ziffern 1, 5, 7, 8, 9 finden, das sind aber fünf Ziffern, also ist das nicht möglich.

Wenn (2) falsch ist, dann sind (1) und (3) wahr, jede der Ziffern 1, 4, 5, 7, 8, 9 müsste in der vierstelligen Zahl vorkommen, aber das geht nicht.

Wenn (3) falsch ist, dann sind (1) und (2) wahr und die Ziffern der vierstelligen Zahl lauten 1, 4, 5, 9. Das ist auch möglich, und zwar nur dieses Szenario.

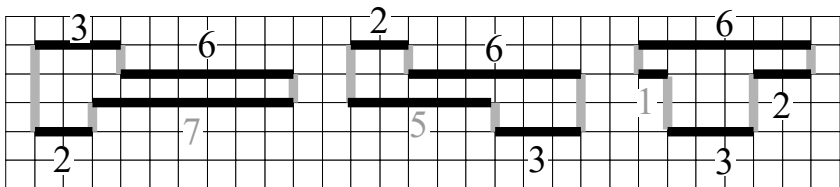
Richtige Antwort(en): A, B, C

13. Auf einem karierten Blatt Papier habe ich entlang der Gitternetzlinien ein Vieleck gezeichnet. Ich habe die Seiten des Vielecks abwechselnd dunkel und hell markiert. Siehe ein passendes Beispiel in der Grafik. Das von mir gezeichnete Vieleck hat ebenfalls vier dunkle Seiten, von denen drei Seiten jeweils 2, 3 beziehungsweise 6 Einheiten lang sind. Wie viele Einheiten kann die vierte dunkle Seite lang sein?



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

Lösung: Die aufeinanderfolgenden Seiten des Vielecks sind immer abwechselnd waagrecht oder senkrecht, so liegen alle dunklen Strecken entweder senkrecht oder waagrecht. Wenn ich von einer Ecke des Vielecks startend den Umfang entlang der Seiten ablaufe, dann komme ich zum Schluss wieder am Startpunkt an. Deshalb lege ich dieselbe Distanz nach rechts wie nach links zurück. Also lassen sich die dunklen Strecken in zwei Gruppen teilen, in denen die Gesamtlänge der Strecken gleich ist.



Die Möglichkeiten sind: Wenn $2 + x = 3 + 6$, folgt daraus $x = 7$, wenn $3 + x = 2 + 6$, dann folgt $x = 5$, und wenn $6 + x = 2 + 3$, gibt es keine Lösung. Eine weitere Möglichkeit gibt es noch: wenn $2 + 3 + x = 6$, dann ist $x = 1$.

Richtige Antwort(en): A, D, E

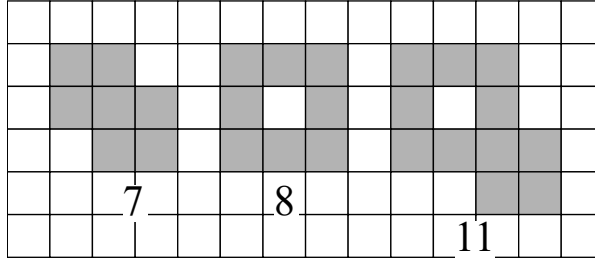
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Malt in einem unbemalten Gitternetz

- a) 7 b) 8 c) 11

Felder so aus, dass jedes ausgemalte Feld 2 oder 4 ausgemalte Nachbarfelder hat! Zwei Felder sind dann Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Seite haben.

Lösung: Unterhalb ist für jeden Fall jeweils ein Beispiel dargestellt.



Eine passende Darstellung für einen Fall wird mit 5 *Punkten*, passende Darstellungen für zwei Fälle mit 10 *Punkten*, passende Lösungen für alle drei Fälle werden mit 16 *Punkten* bewertet.

9. Klasse / 9. Schulstufe

1. Ein Schiff hatte Verpflegung geladen, die für seine Seeleute für 60 Tage reichen würde (außer den Seeleuten befand sich niemand auf dem Schiff), als 30 Schiffbrüchige von einer Insel gerettet wurden. Dadurch reichte die geladene Verpflegung nur noch für 50 Tage. Wie viele Seeleute befanden sich ursprünglich auf dem Schiff, wenn alle täglich gleich große Portionen an Essen erhielten?
- (A) 15 (B) 50 (C) 100 (D) 150 (E) 200

Lösung: Wenn die Zahl der Seeleute n ist, befanden sich nach der Rettung der Schiffbrüchigen $n + 30$ Personen auf dem Schiff. Somit gilt:

$$60n = 50(n + 30).$$

Daraus folgt $60n = 50n + 1500$, beziehungsweise $10n = 1500$ und somit $n = 150$.

Also befanden sich ursprünglich 150 Seeleute auf dem Schiff.

Richtige Antwort(en): D

2. In den Rechnungen $A \cdot A = \overline{BA}$ und $C + C = \overline{DA}$ stehen gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern. \overline{BA} und \overline{DA} symbolisieren dabei zweistellige Zahlen. Für welche Ziffern könnten die vier unterschiedlichen Buchstaben stehen?
- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Wenn $A \cdot A = \overline{BA}$, dann ist der Wert von A entweder 5 oder 6, aber wegen $C + C = \overline{DA}$ muss es sich bei A um eine gerade Zahl handeln, also ist $A = 6$ und $B = 3$. Demnach muss wegen $C + C = \overline{DA}$ gelten: $C = 8$ und $D = 1$. Die zwei Rechnungen lauten folglich $6 \cdot 6 = 36$ und $8 + 8 = 16$.

Richtige Antwort(en): A, B, E

3. Das Haus von Tante Bärbel hat fünf Fenster, in welche sie insgesamt 20 Blumentöpfe gestellt hat. Sie hat in keines der Fenster mehr als 5 Blumentöpfe gestellt. Zudem gibt es zwei Fenster, bei denen sich in einem die doppelte Anzahl an Töpfen befindet wie im anderen. Wie viele Blumentöpfe könnten in irgendeinem der Fenster stehen?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: In den restlichen drei Fenstern können höchstens $3 \cdot 5 = 15$ Blumentöpfe stehen, also müssen sich in den zwei fraglichen Fenstern mindestens $20 - 15 = 5$ Töpfe befinden. Da in einem Fenster doppelt so viele Töpfe stehen wie in dem anderen, muss die Zahl der Töpfe 2 und 4 betragen. (1 und 2 würden gemeinsam weniger als 5 ergeben, 3 und 6 oder 4 und 8 Töpfe würden

jedoch die Höchstanzahl von 5 Töpfen in einem der Fenster überschreiten.)

Die restlichen $20 - 6 = 14$ Blumentöpfe können in den 3 Fenstern nur so verteilt werden, dass deren Anzahl pro Fenster 5, 5 und 4 ist (da nicht mehr als 5 Töpfe in einem Fenster stehen können). Der Größe nach stehen also in den fünf Fenstern 2, 4, 4, 5, 5 Töpfe.

Richtige Antwort(en): B, D, E

4. Peter hat bei der Zahl 1 beginnend alle natürlichen Zahlen der Reihe nach auf folgende Weise aufgeschrieben: 1234567891011121314... Wenn wir vorne mit dem Abzählen beginnen, an der wievielten Stelle könnte sich eine 5 in dieser Reihe befinden? Überprüft die untenstehenden Möglichkeiten!

(A) 98. (B) 99. (C) 100. (D) 101. (E) 102.

Lösung: Zunächst folgen 9 einstellige Zahlen aufeinander, danach kommen zweistellige. Da $9 + 2 \cdot 45 = 9 + 90 = 99$, steht an der 99. Stelle die letzte Ziffer der Zahl $9 + 45 = 54$, also eine 4. Darauf folgt 5556. Somit steht sowohl an der 98., an der 100., an der 101. als auch an der 102. Stelle eine 5.

Richtige Antwort(en): A, C, D, E

5. Marc hat eine Ebene mit 5 Geraden in Bereiche unterteilt und die dabei entstandenen Vielecke bunt ausgemalt. Wie viele Bereiche könnten auf diese Weise entstanden sein, die Marc nicht ausgemalt hat?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

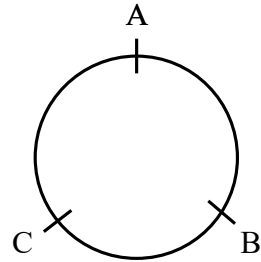
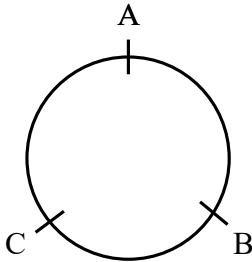
Lösung: Wenn alle Geraden parallel zu einander sind, dann entstehen 6 Bereiche, die alle keine Vielecke sind (Geraden und Ebenen sind unendlich). Schneiden sich einige Geraden, dann entstehen Schnittpunkte. Wir betrachten einen Kreis, der alle Schnittpunkte enthält. Diese Kreislinie wird all jene Bereiche schneiden, bei denen es sich nicht um Vielecke handelt, denn diese befinden sich im Inneren des Kreises. Der Kreis wird von jeder Geraden jeweils in zwei Punkten geschnitten, dadurch wird er von den Geraden in 10 Kreisbögen unterteilt. Die Endpunkte eines Kreisbogens können auf eine Gerade, auf zwei sich schneidende Geraden oder auf zwei parallele Geraden fallen. Im letzteren Fall wird es eine Gerade geben, die beide parallelen Geraden schneidet. Da diese Schnittpunkte nur innerhalb des Kreises liegen dürfen, trennen diese Geraden den Kreisbogen von allen anderen, wodurch sich jeder Kreisbogen in einem eigenen Bereich befindet und niemals zwei Kreisbögen in demselben Bereich sind. Also gibt es bei Geraden, die nicht alle parallel zueinander sind, 10 Bereiche, die kein Vieleck darstellen

Richtige Antwort(en): A, E

6. Drei Vagabunden sitzen unter einem Baum um ein kleines Lagerfeuer herum. Alle haben einige Äpfel dabei. Einer von ihnen reicht ein Drittel seiner Äpfel (das sind immer einige ganze Äpfel) an seinen linken Nachbar weiter. Dies macht ihm einer der beiden anderen und zuletzt auch der dritte Vagabund nach. Dadurch haben am Ende alle drei Vagabunden dieselbe Anzahl an Äpfeln. Wie viele Äpfel könnte einer der Vagabunden am Anfang besessen haben?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Lösung: Bezeichnen wir die drei Vagabunden mit A, B, C. Die Übergabe kann in zwei unterschiedlichen Reihenfolgen erfolgen, welche in der Grafik verdeutlicht werden.



$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

$A \rightarrow B \quad C \rightarrow A \quad B \rightarrow C$

Betrachten wir die erste Möglichkeit. Anfangs haben die Vagabunden A, B, C der Reihe nach x, y, z Äpfel. Nach dem Weiterreichen entspricht die Zahl der Äpfel der Reihe nach:

$$\left(\frac{2}{3}x, y + \frac{x}{3}, z \right), \left(\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right), z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right) \right),$$

$$\text{und schließlich } \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right), \frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right), \frac{2}{3}\left(z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right)\right) \right)$$

Zum Schluss haben alle dieselbe Anzahl an Äpfeln. Da sich die zweite und

$$\text{dritte Menge gleichen müssen } \left(y + \frac{x}{3} \right) = \left(z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{3} \right) \right),$$

$$\text{folgt } \frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{3} \right) = z.$$

Vergleichen wir nun die erste und dritte Menge, erhalten wir:

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{3}\left(y + \frac{x}{3} \right) \right), \text{ woraus wegen der vorigen Überlegung folgt:}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}\left(z + \frac{z}{2} \right), \text{ also } 4x = 3z.$$

Als nächstes untersuchen wir die Gleichung $\frac{2}{3}\left(y + \frac{x}{3}\right) = z$.

Da $2\left(y + \frac{x}{3}\right) = 4x$, folgt $3y = 5x$.

Also ist $4x = 3z$ und $3y = 5x$. Daraus folgt $x = 3a$, $y = 5a$, $z = 4a$, wobei a für eine positive ganze Zahl steht.

Wenn wir uns die zweite Möglichkeit durchrechnen, erhalten wir $x = 9b$, $y = 9b$, $z = 6b$, wobei b für eine positive ganze Zahl steht.

Da a und b positive ganze Zahlen sind, können weder x , y noch z die Werte 11, 13 oder 14 annehmen.

Wenn $a = 2$ ist, dann ist im ersten Fall $y = 10$, und wenn beispielsweise $b = 2$ ist, dann ist im zweiten Fall $z = 12$.

Richtige Antwort(en): A, C

7. In zwei Schachteln befinden sich Handschuhe. In der linken Schachtel sind 17 weiße, 4 grüne und 4 rote Handschuhe für die linke Hand, in der rechten Schachtel 13 weiße, 8 grüne und 8 rote Handschuhe für die rechte Hand. (Alle Handschuhe sind gleich groß.) Wie viele Handschuhe müssen wir mindestens mit geschlossenen Augen aus den Schachteln ziehen, um sicher zu sein, dass sich unter den gezogenen Handschuhen ein Paar in derselben Farbe befindet?

(A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

Lösung: Wir zeigen, dass es ausreicht, 22 Handschuhe aus den Schachteln zu ziehen, 5 aus der linken und 17 aus der rechten. Unter den 17 rechtshändigen Handschuhen befinden sich sicherlich ein weißer und sicher auch einige rote oder grüne. Wenn sich nun unter den 5 linkshändigen Handschuhen weiße befinden, dann haben wir ein weißes Paar, wenn keine weißen unter ihnen sind, dann gibt es sowohl rote als auch grüne, wodurch wir entweder ein rotes oder ein grünes Paar haben.

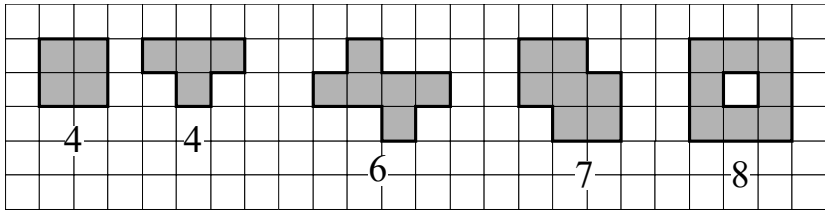
Wir zeigen nun, dass es nicht ausreicht, 21 Handschuhe zu ziehen. Es sei L die Zahl der gezogenen linken Handschuhe und R die Zahl der gezogenen rechten Handschuhe. Dann ist $L + R = 21$. Wenn $4 \leq R \leq 16$, dann kann es sein, dass sich unter den rechten Handschuhen kein weißer Handschuh befindet (wir haben die $8 + 8 = 16$ roten und grünen Handschuhe gezogen) und von den linken Handschuhen können wir $L \leq 17$ weiße ziehen, wodurch wir kein Paar derselben Farbe erhalten. Wenn $1 \leq R \leq 3$, dann könnten alle rechten Handschuhe rot sein, während wir von den linken alle $17 + 4 = 21$ nicht roten ziehen können. Auch in diesem Fall haben wir kein Paar derselben Farbe. Also reichen, um sicher zu sein, ein passendes Paar zu finden, 21 gezogene Handschuhe nicht aus.

Richtige Antwort(en): B

8. In einem Gitternetz habe ich einige Felder rot angemalt, wodurch sie eine zusammenhängende Form bilden. Dabei hat jedes rote Feld mindestens ein rotes Nachbarfeld, was bedeutet, dass sie sich an einer gemeinsamen Seite berühren. Es gilt außerdem: Jedes rote Feld hat entweder ausschließlich eine gerade Zahl an roten Nachbarfeldern oder jedes rote Feld hat ausschließlich eine ungerade Zahl an Nachbarfeldern. Wie viele Felder könnte ich auf diese Weise ausgemalt haben?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Die Zahl der roten Felder kann 4, 6, 7 oder 8 betragen, wie dies in der Grafik verdeutlicht wird.



Die Zahl der roten Felder kann nicht 5 betragen, denn:

Wenn jedes der 5 Felder eine ungerade Anzahl an Nachbarn hätte, dann könnte man für jedes Feld die Anzahl der Nachbarn aufschreiben und diese Zahlen addieren. Das wäre die Summe von 5 ungeraden Zahlen, also eine ungerade Zahl. Mit dieser Methode zählen wir aber jede Nachbarschaftsbeziehung doppelt, also müsste das Ergebnis eigentlich eine gerade Zahl ergeben. Also ist es nicht möglich, 5 Felder so anzumalen, dass sie jeweils eine ungerade Zahl an Nachbarn haben.

Betrachten wir nun, was passiert, wenn bei 5 Feldern alle eine gerade Anzahl an Nachbarn hätten. Ein Feld kann in diesem Fall entweder 2 oder 4 Nachbarn haben. 4 Nachbarn kann ein Feld haben, wenn es sich in der Mitte befindet und an allen vier Seiten einen Nachbarn hat und dadurch eine Art Pluszeichen aus 5 Feldern entsteht (wie das Rote Kreuz). In diesem Fall haben aber alle anderen Felder nur 1 Nachbarn, was eine ungerade Anzahl ist. Also können die Felder nur dann alle eine gerade Anzahl an Nachbarn haben, wenn alle 2 Nachbarn haben. So eine Form können wir aber aus 5 Feldern nicht bauen.

Richtige Antwort(en): A, C, D, E

9. In einer Klasse sind zwei beliebige Personen entweder Freunde oder Feinde. Von ihnen hat jeder genau 10 Feinde, und wenn A befreundet mit B ist, jedoch in Feindschaft mit C lebt, dann ist C auch ein Feind von B . Aus wie vielen Personen könnte somit die Klasse bestehen? Untersucht die untenstehenden Möglichkeiten!

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 20

Lösung: In der Klasse gilt: Der Freund meines Freundes ist auch mein Freund. Denn wäre er mein Feind, so wäre er auch der Feind meines Freun-

des. Also haben zwei Freunde dieselben Freunde und dieselben Feinde. So besteht die Klasse aus in sich geschlossenen Freundesgrüppchen.

Wenn ein Freundesgrüppchen aus k Personen besteht, dann ist die Anzahl der Personen in der Klasse $10 + k$ (so haben in dem k -köpfigen Freundesgrüppchen alle 10 Feinde).

Des Weiteren gilt: Besteht das Freundesgrüppchen aus k Personen, dann werden auch alle anderen Freundesgrüppchen aus k Personen bestehen. Daher ist k ein Teiler von 10. Also kann k die Werte 1, 2, 5 oder 10 annehmen.

Daraus folgt: Die Klasse kann aus 11 Personen bestehen, in diesem Fall ist jeder mit jedem verfeindet.

Die Klasse kann auch 12-köpfig sein, in diesem Fall besteht sie aus Cliquen von je 2 Personen.

Die Klassengröße kann auch 15 betragen, in diesem Fall bestehen die Freundesgrüppchen aus immer 5 Personen.

Schließlich können auch 20 Personen in der Klasse sein, in diesem Fall besteht sie aus zwei Cliquen mit jeweils 10 Personen.

Richtige Antwort(en): A, B, D, E

10. Baron von Münchhausen hatte acht Murmeln, deren Gewicht der Reihe nach 1 Gramm, 2 Gramm, ..., 8 Gramm betrug. Graf Strohkopf hatte sich eine von diesen Murmeln ausgeborgt, vergaß jedoch diese zurückzugeben. Daraufhin verteilte Baron von Münchhausen die übrigen Murmeln in den zwei Waagschalen einer Balkenwaage und konnte mit nur einer Messung herausfinden, welche der Murmeln fehlte. Wie viele Gramm könnte die von Graf Strohkopf verlegte Murmel wiegen?

(A) 1 g (B) 2 g (C) 4 g (D) 6 g (E) 8 g

Lösung: Wenn der Baron die übriggebliebenen Murmeln in die beiden Waagschalen legt und sich kein Gleichgewicht einstellt, kann er aus dieser Messung keine brauchbaren Informationen ziehen. Er kann nur dann das Gewicht der fehlenden Murmel schlussfolgern, wenn die Murmeln in den zwei Waagschalen im Gleichgewicht stehen.

Ein Gleichgewicht kann sich einstellen, wenn das Gesamtgewicht der übriggebliebenen 7 Murmeln eine gerade Zahl ist.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ ist eine gerade Zahl, also muss das Gewicht der fehlenden Murmel auch eine gerade Zahl sein: 2, 4, 6 oder 8 Gramm.

Wenn die 2 g Murmel fehlt, stellt sich mit den übrigen Murmeln ein Gleichgewicht ein, wenn in jeder Waagschale das Gesamtgewicht 17 g beträgt. Dazu müssen in jeder Waagschale mindestens 3 Kugeln liegen, was möglich ist.

Wenn die 4 g Murmel fehlt, dann stellt sich das Gleichgewicht ein, wenn das Gesamtgewicht in jeder Waagschale 16 g beträgt. Auch dazu müssen in jeder Waagschale mindestens 3 Kugeln liegen. Auch das lässt sich verwirklichen.

Wenn die 8 g Murmel fehlt, dann stellt sich das Gleichgewicht ein, wenn das Gesamtgewicht in jeder Waagschale 14 g beträgt. Auch dafür müssen in jeder

Waagschale mindestens 3 Kugeln liegen.

Also stellt sich das Gleichgewicht in den bisherigen Fällen immer ein, wenn in einer Waagschale 3 und in der anderen Waagschale 4 Kugeln liegen. Dann könnte Graf Strohkopf die 2 g, 4 g oder 8 g Murmel stibitzt haben, Baron von Münchhausen würde aber nicht genau wissen, um welche der drei Murmeln es sich handelt.

Wenn die 6 g Murmel fehlt, dann stellt sich mit den übrigen Murmeln ein Gleichgewicht ein, wenn in jeder Waagschale das Gesamtgewicht 15 g beträgt. Dieser Fall kann auch eintreten, wenn in einer Waagschale die 7 g und die 8 g Murmeln liegen, während sich in der anderen die 1 g, 2 g, 3 g, 4 g und 5 g Murmeln befinden.

Also ist dies der einzige Fall, bei dem sich ein Gleichgewicht einstellt, wenn in einer der Waagschalen nur 2 Murmeln liegen.

Wenn Baron von Münchhausen Glück hat, legt er in eine Waagschale 2 Murmeln und 5 in die andere und die Waage zeigt ein Gleichgewicht. Dies ist nur im letzten Fall möglich, also befindet sich die 6 g Murmel bei Graf Strohkopf.

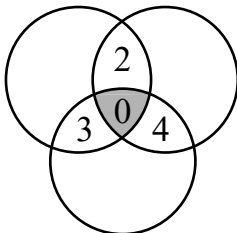
Richtige Antwort(en): D

11. Bei einem Wettbewerb haben von den 9 teilnehmenden Kindern 5 die erste Aufgabe, 6 die zweite Aufgabe und 7 die dritte Aufgabe gelöst. (Insgesamt gab es drei Aufgaben.) Alle Teilnehmenden haben mindestens eine Aufgabe gelöst. Wie viele Kinder könnten alle drei Aufgaben gelöst haben?

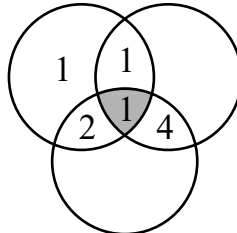
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die Grafiken verdeutlichen, dass die Zahl der Kinder, die alle drei Aufgaben gelöst haben 0, 1, 2, 3 oder 4 betragen kann.

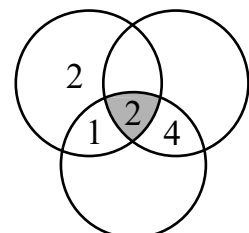
1. Aufgabe: 5 2. Aufgabe: 6 1. Aufgabe: 5 2. Aufgabe: 6 1. Aufgabe: 5 2. Aufgabe: 6



3. Aufgabe: 7



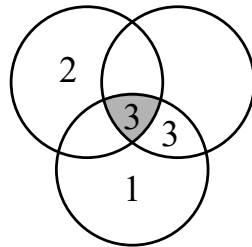
3. Aufgabe: 7



3. Aufgabe: 7

1. Aufgabe: 5

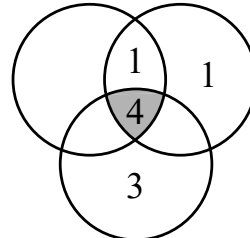
2. Aufgabe: 6



3. Aufgabe: 7

1. Aufgabe: 5

2. Aufgabe: 6



3. Aufgabe: 7

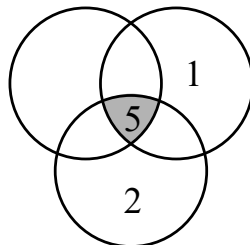
Wenn 5 Kinder alle drei Aufgaben gelöst hätten, dann gäbe es noch ein Kind, das zwar nicht alle Aufgaben, aber Aufgabe 2 ganz bestimmt gelöst hat. Dieses eine Kind kann sich im Diagramm nun an zwei Stellen befinden: Entweder es hat nur Aufgabe 2 gelöst, oder es hat Aufgabe 2 und 3 gelöst. Unten sind beide Möglichkeiten verdeutlicht. Lass uns anschließend überprüfen, ob es somit möglich ist, dass 7 Kinder Aufgabe 3 gelöst haben. Die Grafiken verdeutlichen, dass die Aufgaben sehr wohl von 5, 6, 7 Kindern gelöst werden können, wobei 5 Kinder alle drei Aufgaben lösen, jedoch kommen wir in diesem Fall nicht auf die Gesamtanzahl von 9 Kindern. In der ersten Version, bei welcher das untersuchte Kind nur Aufgabe 2 löst, hätten wir nur 8 Teilnehmer, bei der zweiten Version, bei der das Kind Aufgabe 2 und 3 löst, sogar nur 7. Also ist das nicht möglich.

1. Aufgabe: 5

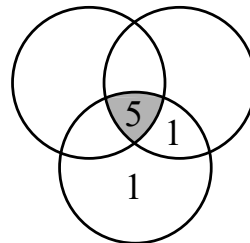
2. Aufgabe: 6

1. Aufgabe: 5

2. Aufgabe: 6



3. Aufgabe: 7

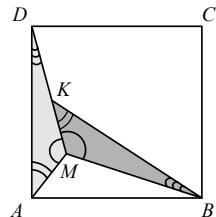


3. Aufgabe: 7

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

12. Wir haben in dem hier dargestellten Quadrat $ABCD$ das Dreieck AMD um den Punkt M gedreht, wodurch wir das Dreieck MBK erhalten haben. Wie viele Grad können die drei unterschiedlichen, in der Grafik markierten Winkel jeweils betragen?

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 120°



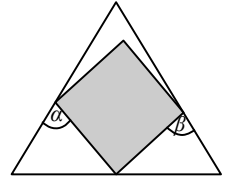
Lösung: Man bemerkt, dass die Dreiecke AMD und AMB deckungsgleich sind, da beide Dreiecke jeweils dieselben Seitenlängen haben. Denn sie teilen sich die Seite AM , wegen der Drehung ist $MD = MB$ und $AD = AB$, weil

es sich um die Seiten eines Quadrates handelt. Daher ist $\sphericalangle DMA = \sphericalangle AMB$, also entspricht $\sphericalangle DMA$ einem Drittel des vollen Winkels um M herum, also $360^\circ : 3 = 120^\circ$.

Aus der zuvor erwähnten Deckungsgleichheit folgt auch, dass AM Winkelhalbierende des bei A befindlichen rechten Winkels bildet, also ist $\sphericalangle MAD = 45^\circ$. Daraus und aus der Winkelsumme in einem Dreieck folgt schließlich, dass $\sphericalangle ADM = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

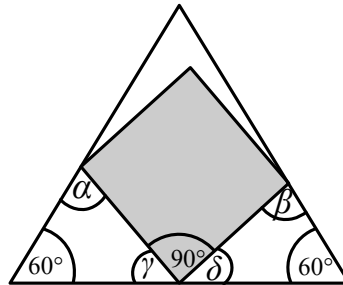
Richtige Antwort(en): A, C, E

13. Wir haben in ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat gezeichnet und dadurch solch eine Grafik erhalten. Jede Seite des Dreiecks wird jeweils von einer Ecke des Quadrates berührt. Wie viele Grad kann die Summe von $\alpha + \beta$ betragen?



- (A) 105° (B) 120° (C) 135° (D) 150° (E) 165°

Lösung: Unter Verwendung der in der Grafik genannten Bezeichnungen ist $\gamma + \delta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.



Da $(\alpha + 60^\circ + \gamma) + (\beta + 60^\circ + \delta) = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ beziehungsweise $\alpha + \beta + 60^\circ + 60^\circ + (\gamma + \delta) = \alpha + \beta + 120^\circ + 90^\circ = \alpha + \beta + 210^\circ = 360^\circ$, ist folglich $\alpha + \beta = 150^\circ$.

Richtige Antwort(en): D

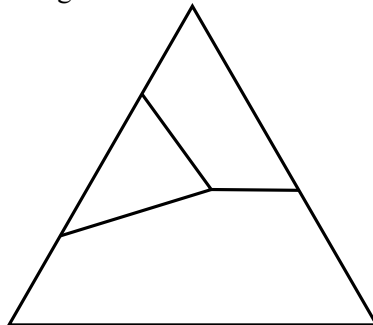
Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. a) Schreibt vier unterschiedliche vierstellige Zahlen der Größe nach aufsteigend so auf, dass jede von ihnen die Ziffern 0, 1, 2, 5 enthält (jede Zahl muss alle vier dieser Ziffern enthalten!) und die Differenz der nebeneinander stehenden Zahlen immer dieselbe ist!
b) Teilt ein Dreieck in drei Teile, nämlich in ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck!

Lösung: a) Die Zahlen 1025, 1520, 2015, 2510 stellen eine passende Aufstellung dar, die Differenz zwischen den Nachbarn beträgt hier 495.

Bei vier passenden Zahlen können 8 Punkte, bei drei passenden Zahlen 3 Punkte vergeben werden. Ansonsten 0 Punkte.

b) Eine mögliche richtige Lösung wird unterhalb dargestellt. Für eine richtige Grafik können 8 Punkte vergeben werden.



10. Klasse / 10. Schulstufe

1. 890 ist eine jener Zahlen, bei denen man jede beliebige Ziffer auswählen kann und um 1 erhöhen oder vermindern kann (auf einmal kann nur eine Ziffer verändert werden), wodurch die so entstandene Zahl durch 11 teilbar ist. Abby hat die kleinste dreistellige Zahl gefunden, die über diese Eigenschaft verfügt. Welche der untenstehenden Ziffern könnten als Ziffern in Abbys Zahl vorkommen?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Die kleinste durch 11 teilbare dreistellige Zahl ist die Zahl 110. Verändern wir eine Ziffer, können wir 110 aus den Zahlen 100, 111, 120 oder 210 erhalten. 100 und 111 eignen sich dabei nicht zur Lösung der Aufgabe, da man bei diesen die Hunderterstelle nur erhöhen, jedoch nicht verringern kann, damit weiterhin eine dreistellige Zahl entsteht, und die so erhaltenen Zahlen 200 und 211 nicht durch 11 teilbar sind. 120 hingegen eignet sich wunderbar, denn sowohl 220, 110 als auch 121 sind durch 11 teilbar. Also ist Abbys Zahl 120.

Anmerkung: Die kleinste passende Zahl kann auch durch strategisches Probieren ermittelt werden.

Richtige Antwort(en): A, B, C

2. Wir haben vier gegebene Zahlen in allen möglichen Kombinationen paarweise addiert und die Summen aufgeschrieben. Die vier kleinsten Summen lauten: 1, 5, 8 und 9. Welche der untenstehenden Zahlen könnten sich unter den ursprünglichen vier Zahlen befunden haben?
- (A) 2 (B) 2,5 (C) 4 (D) 6 (E) 6,5

Lösung: Bezeichnen wir die vier Zahlen aufsteigender Reihenfolge mit a , b , c und d . Dann gilt für die Größenverhältnisse der berechneten Summen:

$$a + b \leq a + c \leq \frac{b + c}{a + d} \leq b + d \leq c + d$$

Man sieht, dass allein aus der Bedingung $a \leq b \leq c \leq d$ die meisten berechneten Summen miteinander vergleichbar sind, bis auf $a + d$ und $b + c$, auf welche man keine Rückschlüsse ziehen kann.

Die vier kleinsten Summen sind also $a + b$, $a + c$, $a + d$ und $b + c$, wir wissen zudem aus der Angabe, dass von diesen die zwei kleinsten $a + b = 1$ und $a + c = 5$ sein müssen.

Für die übrigen zwei Summen gilt entweder

(I) $a + d = 8$ und $b + c = 9$

oder

(II) $a + d = 9$ und $b + c = 8$.

Durch das Lösen der Gleichungssysteme erhalten wir für den ersten Fall die

Lösungen $a = -1,5$; $b = 2,5$; $c = 6,5$; $d = 9,5$, und für den zweiten Fall $a = -1$; $b = 2$; $c = 6$; $d = 10$.

Es gibt also zwei unterschiedliche Gruppen von vier Zahlen, für die die Bedingungen aus der Aufgabe erfüllt werden. Demnach ist aus den Antwortmöglichkeiten allein (C) keine geeignete Lösung.

Richtige Antwort(en): A, B, D, E

3. Die Obertupfinger und Untertupfinger veranstalteten gemeinsam einen Ball. Aus Untertupfung nahmen 8 Mädchen und 13 Jungen teil, aus Obertupfung 15 Mädchen und 10 Jungen. Bei der Eröffnung tanzte jedes Mädchen mit einem Jungen als Paar. Wie viele Tanzpaare könnte es so bei der Eröffnung gegeben haben, bei denen jemand aus Untertupfung mit jemandem aus Obertupfung tanzte?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: Die geringste Anzahl an Tanzpaaren, die unseren Anforderungen entsprechen, erhalten wir, indem wir die höchstmögliche Zahl der Paare aus demselben Dorf ermitteln. Aus Untertupfung konnten höchstens 8 Paare kommen, aus Obertupfung höchstens 10 Paare. Die so übriggebliebenen 5 Jungen aus Untertupfung bildeten schließlich mit den 5 übriggebliebenen Mädchen aus Obertupfung gemischte Paare.

5 ist also die geringste Zahl an gemischten Paaren; sollen weitere dazukommen, müssen sich ein Junge und ein Mädchen aus einem gleichen Tanzpaar trennen und einen neuen Partner und eine neue Partnerin aus einem gleichen Tanzpaar aus dem anderen Dorf suchen. So entstehen nicht ein, sondern immer 2 neue, gemischte Tanzpaare. So kann die nächste Anzahl an Paaren 7 betragen, bei denen jemand aus Obertupfung mit jemandem aus Untertupfung tanzt. Mit dieser Überlegung wird auch ersichtlich, dass es keine 8, sehr wohl aber 9 gemischte Tanzpaare geben kann.

Richtige Antwort(en): A, C, E

4. Bei a und b handelt es sich um Zahlen. Wir haben die Ergebnisse von $a + b$, $a - b$, ab , $\frac{a}{b}$ berechnet und dabei dreimal den gleichen Wert erhalten, einmal jedoch ein von den übrigen verschiedenes Ergebnis. Welchen Wert könnte $a - b$ annehmen?

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ (E) 2

Lösung: Wegen $\frac{a}{b}$ muss $b \neq 0$ sein, also ist $a + b \neq a - b$, die übrig gebliebe-

nen zwei Werte müssen also gleich sein: $ab = \frac{a}{b}$.

Wenn $a = 0$, dann folgt aus $a + b = ab$ oder $a - b = ab$, dass b auch 0 ist, was nicht sein kann. Wenn $a \neq 0$, dann $b^2 = 1$.

Wenn $b = 1$, dann wäre $a = a + 1$ oder $a = a - 1$ auch erfüllt, was nicht sein kann.

Also ist $b = -1$, und dann ist entweder $-a = a + 1$ oder $-a = a - 1$, woraus folgt $a = -0,5$ oder $a = 0,5$.

Es gibt also zwei Zahlenpaare, welche Lösungen ergeben: $(-0,5; -1)$ und $(0,5; -1)$.

In diesem Fall ist der Wert von $a - b$ gleich $\frac{1}{2}$ beziehungsweise $\frac{3}{2}$.

Richtige Antwort(en): B, D

5. In einem Dorf wird der neue Bürgermeister gewählt, zwei Kandidaten stehen zur Auswahl: Karl und Siegbert. Die wahlberechtigten Dorfbewohner sind sehr engagiert, insgesamt haben 90% von ihnen eine Stimme abgegeben. Bei der Auszählung der Stimmen stellte man fest: Von den abgegebenen Stimmzetteln sind 128 ungültig. Karl erhielt um 248 mehr gültige Stimmen als Siegbert. Insgesamt stimmten 49% der Wahlberechtigten gültig für Karl. Wie viele gültige Stimmen erhielt Karl insgesamt?

(A) 376 (B) 660 (C) 705 (D) 735 (E) 1500

Lösung: Es sei x die Zahl der Wahlberechtigten, dann erhielt Karl $0,49x$ Stimmen. Siegbert erhielt dabei um 248 weniger Stimmen, was $0,49x - 248$ entspricht. Addieren wir hierzu die Stimmen für Karl sowie die 128 ungültigen Stimmen, erhalten wir die Gesamtsumme der Stimmen, die 90% der wahlberechtigten Bürger ausmacht.

$$0,49x - 248 + 0,49x + 128 = 0,9x,$$

$$0,98x - 120 = 0,9x,$$

$$0,08x = 120,$$

$$x = 1500.$$

Demnach ist die Zahl der wahlberechtigten Bürger 1500 und Karl erhielt $0,49 \cdot 1500 = 735$ gültige Stimmen.

Richtige Antwort(en): D

6. Benedikt hat eine fünfstellige Zahl auf eine zuvor leere Tafel geschrieben. Anschließend schrieb er die Summe der ersten beiden Ziffern ebenfalls auf, dann die Summe der ersten drei Ziffern, die Summe der ersten vier Ziffern und schließlich die Ziffernsumme aller fünf Ziffern. Zählen wir nun alle so auf die Tafel geschriebenen Ziffern, merken wir, dass ein 1-er, sechs 2-er, ein

4-er, drei 6-er und zwei 8-er auf der Tafel stehen. Welche der folgenden Zahlen könnten auf der Tafel stehen?

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 24

Lösung: Es stehen also sicherlich 13 Ziffern auf der Tafel, und da $13 = 5 + 4 \cdot 2$, sind alle vier Ziffernsummen zweistellig, und da wir nur eine 1 haben, ist die Summe der ersten drei Ziffern mindestens 20. Sie muss sogar größer als 20 sein, da sich unter den Ziffern keine 0 befindet. So müssen die ersten 3 Ziffern (in beliebiger Reihenfolge) 8, 8, 6 lauten. Wir wissen auch, dass alle Ziffernsummen kleiner als 30 sind, da wir keine 3 als Ziffer haben.

Die Summe der ersten drei Ziffern lautet also 22, die Ziffernsummen von den ersten vier und von allen fünf Ziffern sind gerade und kleiner als 30. Demnach könnten sie 24, 26 oder 28 sein, doch 28 eignet sich nicht, da wir bereits alle 8er verbraucht haben. Also kommen nur 24 und 26 in Frage, somit sind die letzten beiden Ziffern der fünfstelligen Zahl 2er, somit steigt die Ziffernsumme von 22 auf 24 und schließlich 26. Unsere einzige 4 steckt also in der 24, deshalb kann es sich bei den ersten zwei Ziffern der fünfstelligen Zahl nicht um 6 und 8 handeln, da deren Summe 14 ergeben würde und wir unsere 4 bereits verbraucht haben.

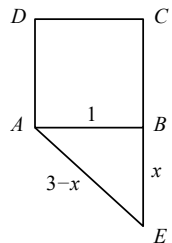
Basierend auf den bisherigen Überlegungen kann es sich bei der fünfstelligen Zahl nur um 88622 handeln. Benedikt schrieb die Zahlen 88622, 16, 22, 24, 26 auf die Tafel.

Richtige Antwort(en): C, E

7. Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ beträgt 1 cm . Anna konstruierte an die Seite AB ein solches rechtwinkliges Dreieck AEB , dessen Umfang gleich dem Umfang des Quadrates $ABCD$ ist. Wie viele cm^2 kann die Fläche des Dreiecks ABE betragen?

- (A) $\frac{1}{2} \text{cm}^2$ (B) $\frac{2}{3} \text{cm}^2$ (C) $\frac{3}{4} \text{cm}^2$ (D) $\frac{4}{5} \text{cm}^2$ (E) 1cm^2

Lösung: Da $|\overline{AE}| + |\overline{EB}| = 3 \text{ cm}$ ist, muss von \overline{AE} und \overline{BE} eine Seite mindestens $1,5 \text{ cm}$ betragen, also länger als \overline{AB} sein, also ist beim Dreieck AEB die Seite \overline{AB} eine Kathete. Bezeichnen wir die Länge der anderen Kathete mit x . So können wir die Länge der Hypotenuse als $3 - x$ aufschreiben. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:



$$1^2 + x^2 = (3 - x)^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 6x = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Da die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gleich der Hälfte des Produktes der zwei Katheten ist, ist

$$A_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

Richtige Antwort(en): B

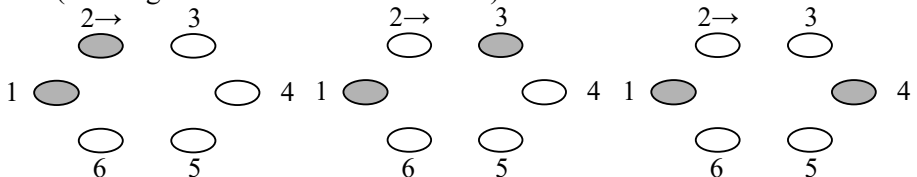
8. Ali und Basti, zwei schlaue Jungs, wurden von einem Bösewicht gefangen genommen und vor eine schwierige Prüfung gestellt. Der Bösewicht legte in jede Ecke eines regelmäßigen sechseckigen Tisches jeweils ein Bonbon, von denen er zuvor zwei vergiftet hatte. Ali und Basti müssen abwechselnd eine der Süßigkeiten essen, bis sie zusammen vier der Bonbons verspeist haben. Am Montagabend trennte man die beiden Jungs voneinander und führte Ali zum sechseckigen Tisch, wo man ihm die Position der zwei vergifteten Bonbons zeigte. Danach wurden weder der Tisch, noch die Bonbons bewegt. Da die beiden Jungs wussten, dass dies geschehen würde, schmiedeten sie vor ihrer Trennung einen Plan, der sicherstellen sollte, dass niemand ein vergiftetes Bonbon erwischt. (Sie wussten auch, dass man Ali die vergifteten Bonbons zeigen und ihre Position danach nicht verändern würde.) Kann es ihnen gelingen, einen Plan zu entwickeln, der aufgeht und tatsächlich sicherstellt, dass weder Ali noch Basti ein vergiftetes Bonbon erwischen?

- (A) Ja, egal wer anfängt.
- (B) Ja, wenn Ali anfängt.
- (C) Ja, wenn Basti anfängt.
- (D) Nein, wenn Basti anfängt.
- (E) Es gelingt ihnen in keinem Fall.

Lösung: Da Basti die Position der vergifteten Süßigkeiten nicht kennt, kann es passieren, dass er gleich ein vergiftetes Bonbon erwischt, falls er anfangen muss. Daher sind die Antwortmöglichkeiten (A) und (C) falsch, (D) jedoch richtig.

Wir zeigen, dass der Plan aufgehen kann, wenn Ali beginnt.

Die zwei vergifteten Bonbons können auf drei unterschiedliche Arten in Bezug zueinander auf dem Tisch liegen: So, dass sie nebeneinander liegen, dass im Uhrzeigersinn gesehen ein gutes Bonbon zwischen ihnen liegt, oder dass zwei gute Bonbons zwischen ihnen liegen. Dies verdeutlicht die Grafik unterhalb (die vergifteten Bonbons sind dunkel).



In allen drei Fällen gibt es zwei nebeneinander liegende Bonbons, von denen keines vergiftet ist.

Also kann Ali beim Pläneschmieden Basti folgendes aufgetragen haben:

„Wähle das erste Bonbon, das im Uhrzeigersinn neben dem Bonbon liegt, das ich zuvor gegessen habe. Wähle als zweites das Bonbon, das schräg gegen-

über von meinem ersten Bonbon liegt!“

So ist im ersten Fall die Reihenfolge der gewählten Bonbons: Ali-3, Basti-4, Ali-5, Basti-6, im zweiten Fall: Ali-5, Basti-6, Ali-4, Basti-2 und im dritten Fall: Ali-2, Basti-3, Ali-6, Basti-5.

So können beide die vergifteten Süßigkeiten vermeiden, also ist Antwortmöglichkeit (B) richtig und (E) falsch.

Anmerkung: Es können auch andere Strategien entwickelt werden, die die vergifteten Bonbons vermeiden.

Richtige Antwort(en): B, D

9. Jeder der sieben Zwerge wählte eine ganze Zahl. Anschließend sind wir alle Möglichkeiten durchgegangen, um Zweierpaare unter den Zwergen zu bilden. Bei all diesen entstandenen Paaren addierten wir zunächst die Zahlen, die die jeweiligen zwei Zwerge gewählt hatten, anschließend berechneten wir das Produkt der beiden Zahlen. Unter den so erhaltenen Summen befanden sich 6 negative Zahlen, unter den Produkten waren ebenfalls 6 negative Zahlen. Wie viele negative Zahlen könnten die Zwerge folglich insgesamt gewählt haben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Lösung: Einige der Zwerge müssen eine negative Zahl gewählt haben, ansonsten würden sich unter den Summen der Paare keine negativen Zahlen befinden.

1 negative Zahl ist möglich: -7, 1, 2, 3, 4, 5, 6. In diesem Fall befinden sich sowohl unter den Summen als auch unter den Produkten 6 negative Zahlen.

2 negative Zahlen sind auch möglich: -3, -1, 0, 0, 2, 4, 5. Auch in diesem Fall befinden sich sowohl unter den Summen als auch unter den Produkten 6 negative Zahlen.

Es können jedoch nicht 3 negative Zahlen sein. Denn es müssten, betrachten wir die Produkte, mindestens zwei positive Zahlen von den Zwergen gewählt worden sein, die restlichen zwei Zahlen müssten 0 sein, denn nur so befänden sich unter den Produkten 6 negative Zahlen. Aber in diesem Fall sind die Summen, die mit 3 negativen Zahlen und zweimal 0 gebildet werden können (5 Zahlen), alle negativ, also zehn negative Summen.

Hätten die Zwerge 4 negative Zahlen gewählt, dann könnten sich unter den Produkten 0, 4, 8 oder 12 negative Zahlen befinden.

Hätten die Zwerge 5 oder 6 negative Zahlen gewählt, dann befänden sich unter den Summen mindestens 10 negative Zahlen. (Wenn die Zwerge 6 negative Zahlen wählen, wäre es möglich, 6 negative Zahlen als Produkte zu erhalten, das Problem taucht erst bei den Summen auf.)

Richtige Antwort(en): A, B

10. Auf der Tafel stehen zehn unterschiedliche Zahlen, die mit grüner Kreide geschrieben wurden. Ich berechne paarweise alle Summen dieser Zahlen, diese Summen schreibe ich mit roter Kreide auf. Unter den roten Zahlen kommt

zweimal die 20 und zweimal die 26 vor. Wie oft könnte 30 unter den roten Zahlen vorkommen?

- (A) 1-mal (B) 2-mal (C) 3-mal (D) 4-mal (E) 6-mal

Lösung: Wenn zwei verschiedene Zahlen zusammen 20 als Summe ergeben, ist die eine Zahl um so viel kleiner als 10, wie die andere größer als 10 ist. Bei zwei Zahlenpaaren, die jeweils 20 als Summe haben, werden sich die Zahlen so auf einem Zahlenstrahl verteilen, dass 10 genau auf halbem Weg zwischen den zwei Zahlen eines Zahlenpaars liegt.

Unter den grünen Zahlen befinden sich zwei Zahlenpaare, bei denen sich die Zahl 13 auf halbem Weg befindet.

Wenn sich die 4 Zahlen, die symmetrisch um 10 herum verteilt liegen, von den 4 Zahlen, die symmetrisch um 13 herum verteilt liegen, unterscheiden, dann bleiben von den zehn Zahlen nur noch zwei übrig, für die wir keinerlei

Bedingungen aufgestellt haben. Diese können symmetrisch um $\frac{30}{2} = 15$ ver-

teilt liegen. Also kann unter den roten Zahlen 30 einmal vorkommen. Ein Beispiel hierfür wäre: 9, 11, 8, 12, 10, 16, 6, 20, 5, 25.

Die um 10 und 13 herum symmetrisch liegenden Zahlen können aber auch so gewählt werden, dass die 30 unter den roten Zahlen mehrmals vorkommt.

Die Zahl 30 kommt zweimal vor, wenn ich um 10 herum die Zahlen 9 und 11 wähle (deren Summe ist 20) und zur 11 auch die 19 wähle, um aus diesen zwei Zahlen die Summe von 30 zu bilden. Um 10 herum können auch noch 8 und 12 (deren Summe ist 20) gewählt werden, sowie zusätzlich zur 12 die Zahl 18 (die Summe beträgt 30). Bei den so gewählten zehn Zahlen unterscheiden sich nur die letzten zwei Zahlen von der zuvor gewählten Zahlenreihe: 9, 11, 8, 12, 10, 16, 6, 20, 19, 18.

Die Zahl 30 kommt dreimal vor, wenn die gewählten Zahlen die folgenden sind: 9, 11, 8, 12, 21, 5, 16, 6, 20, 19, 18. In diesem Fall erhalten wir 30 als Summe der Zahlenpaare $9 + 21$, $11 + 19$, und $12 + 18$.

Die Zahl 30 kommt viermal vor, wenn die Wahl auf die Zahlen: 9, 11, 8, 12, 21, 5, 16, 4, 22, 19, 18 fällt. Hier erhalten wir 30 als Summe von $9 + 21$, $11 + 19$, $8 + 22$ und $12 + 18$.

Sechsmal kann 30 nicht vorkommen, denn in diesem Fall gäbe es 6 Zahlenpaare, deren Summe 30 ergibt. Da es aber keine zwei gleichen Zahlen gibt, bräuchten wir dafür zwölf Zahlen, wir haben aber nur zehn.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D

11. In der Mathematikstunde schrieb der Lehrer eine Zahl auf eine leere Tafel und rief anschließend neun Kinder nacheinander zur Tafel. Jedes Kind machte eine Aussage:
1. Die Zahl ist durch 2 teilbar.
 2. Die Zahl ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 2.

- 3. Die Zahl ist durch 4 teilbar, aber nicht durch 3.
- 4. Die Zahl ist durch 5 teilbar, aber nicht durch 4.
- 5. Die Zahl ist durch 6 teilbar, aber nicht durch 5.
- 6. Die Zahl ist durch 7 teilbar, aber nicht durch 6.
- 7. Die Zahl ist durch 8 teilbar, aber nicht durch 7.
- 8. Die Zahl ist durch 9 teilbar, aber nicht durch 8.
- 9. Die Zahl ist durch 10 teilbar, aber nicht durch 9.

Wie viele dieser Aussagen können wahr sein? Untersucht die untenstehenden Antwortmöglichkeiten!

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Zwei aufeinanderfolgende Aussagen können nicht beide wahr sein, daher kann es höchstens 5 wahre Aussagen geben. Wenn es 5 wahre Aussagen gibt, sind diese die 1., 3., 5., 7. und 9. Aussage. Aber in diesem Fall ist die Zahl durch 4 teilbar, aber nicht durch 3 beziehungsweise durch 6 teilbar, aber nicht durch 5. Folglich dürfte die Zahl nicht durch 3 teilbar sein, sehr wohl aber durch 6, das ist ein Widerspruch in sich. Also war unsere Annahme falsch, es können nicht 5 Aussagen wahr sein.

Wenn die Zahl auf der Tafel 40 ist, dann sind die 1., 3., 7. und 9. Aussagen wahr, also kann es 4 wahre Aussagen geben.

Es kann auch 3 wahre Aussagen geben, wenn die aufgeschriebene Zahl $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ lautet.

Es kann auch 2 wahre Aussagen geben, zum Beispiel wenn die aufgeschriebene Zahl 9 ist.

Es kann 1 wahre Aussage geben, wenn die aufgeschriebene Zahl 2 ist.

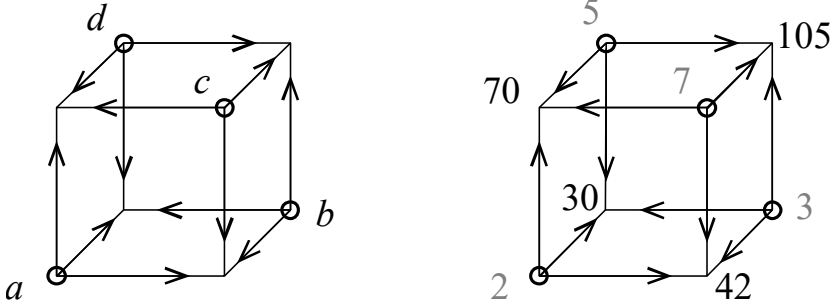
Richtige Antwort(en): A, B, C, D

12. In die Ecken eines Würfels haben wir unterschiedliche positive ganze Zahlen geschrieben, sodass an den zwei Endpunkten jeder Kante Zahlen stehen, von denen eine ein Teiler der anderen ist. Wählen wir aber zwei Zahlen aus zwei Ecken, die nicht entlang derselben Kante liegen, dann erfüllt sich die Forderung, dass eine ein Teiler der anderen ist, nicht. Wenn von den Zahlen sieben Zahlen kleiner als 100 sind, welche Zahlen könnten dann auf dem Würfel vorkommen?

- (A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 42 (E) 60

Lösung: Lasst uns eine Kante wählen, auf der die Zahlen x und y liegen und auf der y ein Teiler von x ist. Wählen wir als nächstes eine mit y benachbarte Ecke, also eine Ecke, die mit y eine Kante teilt, und nennen diese Zahl z . Wenn z ein Teiler von y ist, dann muss z auch ein Teiler von x sein, da x in diesem Fall die größte Zahl und daher ein Vielfaches von sowohl y als auch z ist. Aber x liegt nicht auf derselben Kante wie z , deshalb darf z kein Teiler von y sein. Da aber z und y auf einer Kante liegen, muss eine der Zahlen die andere teilen, die einzige Möglichkeit ist demnach, dass y ein Teiler von z ist. Die

Zahl y ist also sowohl ein Teiler von x als auch ein Teiler von z . Aus dieser Beobachtung folgt, dass sich jede beliebige Ecke des Würfels auf zwei unterschiedliche Arten verhalten kann: Entweder sie ist ein Vielfaches aller Zahlen, mit denen sie eine Kante teilt, oder sie ist ein Teiler dieser Zahlen. Dies wird in der folgenden Grafik verdeutlicht: Ein Pfeil zeigt immer vom Teiler zum Vielfachen, die Pfeile laufen entweder in einer Ecke zusammen oder zeigen alle von der Ecke weg.



Die erste Grafik verdeutlicht die Teilbarkeit der Zahlen untereinander. Nennen wir die Zahlen in jenen Ecken, von denen die Pfeile wegzeigen, a , b , c und d , diese Zahlen sind untereinander paarweise teilerfremd und größer als 1. In den Ecken, in denen die Pfeile zusammenlaufen – zum Beispiel aus den Ecken a , b , c – stehen die Vielfachen dieser Zahlen, also zum Beispiel das Vielfache der Zahlen a , b , c .

Wenn wir für die Zahlen a , b , c , d die kleinstmöglichen Zahlen einsetzen, nämlich die Primzahlen 2, 3, 5 und 7, dann sind sieben Zahlen auf dem Würfel kleiner als 100 (siehe zweite Grafik). Wählen wir die nächstgrößere Gruppe von vier Primzahlen (2, 3, 5 und 11), dann sind bereits zwei Zahlen auf dem Würfel größer als 100, diese lauten 110 und 165. Also können wir nur die Zahlen 2, 3, 5 und 7 für unsere Variablen einsetzen. Die schwarzen Zahlen in der zweiten Grafik können wir jedoch auch durch deren Vielfache ersetzen, solange diese kleiner als 100 bleiben. So kann dort zum Beispiel statt 30 die Zahl 60 oder 90 stehen, statt 42 die Zahl 84.

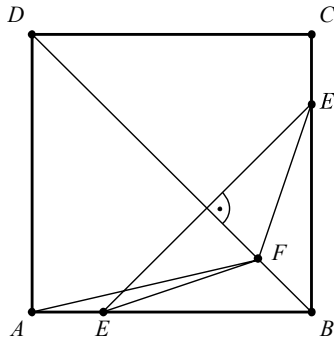
Richtige Antwort(en): C, D, E

13. In dem Quadrat $ABCD$ soll der auf der Seite \overline{AB} liegende, dem Punkt A am nächsten gelegene Viertelungspunkt E heißen. Ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen \overline{BD} soll mit F bezeichnet werden. Welche Länge in cm kann die Summe $|\overline{AF}| + |\overline{EF}|$ von den untenstehenden Antwortmöglichkeiten haben?

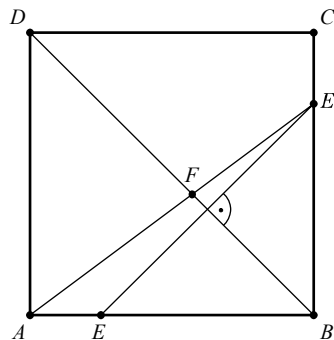
(A) 1,15 cm (B) 1,2 cm (C) 1,25 cm (D) 1,3 cm (E) 1,35 cm

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass der kleinstmögliche Wert der gesuchten

Summe $1,25 \text{ cm}$ ist. Dafür spiegeln wir den Punkt E an der Diagonalen \overline{BD} des Quadrates, dieser neue Punkt wird mit E' bezeichnet. Dann wird E' auf der Seite \overline{BC} liegen (er wird der näher an C gelegene Viertelungspunkt sein). Zudem gilt in diesem Fall, dass $|\overline{FE}| = |\overline{FE}'|$ (aufgrund der Achsenspiegelung), also ist es aus Sicht der Aufgabe äquivalent, wenn wir den kleinsten Wert für die Summe $|\overline{AF}| + |\overline{E'F}|$ suchen.



Also suchen wir die kleinstmögliche Länge des Streckenzuges AFE' . Der Streckenzug ist dann am kürzesten, wenn er gerade ist (aufgrund der Dreiecksungleichung), also müssen die Punkte A , F und E' auf einer Geraden liegen. Demnach ist die beste Lage für F jene, die der Schnittpunkt zwischen $\overline{AE'}$ und \overline{BD} ist.

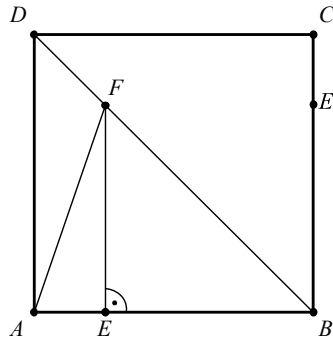


In diesem Fall ist das gesuchte Minimum für $|\overline{AF}| + |\overline{E'F}|$ nichts anderes als die Länge der Strecke $\overline{AE'}$. Um diese Länge bestimmen zu können, stellen wir den Satz des Pythagoras für das Dreieck ABE' auf:

$$AE'^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}, \text{ woraus folgt: } AE' = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ cm}.$$

Also beträgt das Minimum der Summe $|\overline{AF}| + |\overline{E'F}|$ in der Tat $1,25 \text{ cm}$.

Somit sind die Antwortmöglichkeiten (A) und (B) falsch, (C) jedoch richtig.



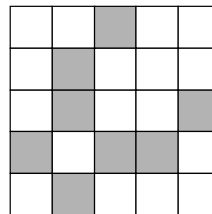
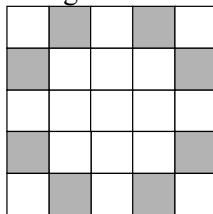
Wenn F der Schnittpunkt zwischen der aus E konstruierten Normale auf \overline{AB} und der Strecke \overline{BD} ist, dann ist $|\overline{EF}| = |\overline{BE}| = 0,75 \text{ cm}$ (da $\triangle EBF$ gleichschenkelig ist). Da in diesem Fall \overline{AF} die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks AEF ist, muss sie länger als $0,75 \text{ cm}$ sein, also ist die Summe $|\overline{AF}| + |\overline{EF}|$ größer als $0,75 + 0,75 = 1,5 \text{ cm}$. Wenn sich F dem Punkt D nähert, dann wird diese Summe stetig größer, wenn sich der Punkt jedoch dem Halbierungspunkt der Diagonale aus der Richtung von D nähert, wird die Summe immer kleiner. Also nimmt die Summe jeden Wert zwischen $1,25 \text{ cm}$ und $1,5 \text{ cm}$ an (sie nimmt auch größere Werte als $1,5 \text{ cm}$ an, das ist aber für die Frage hier nicht relevant). Somit sind auch die Antwortmöglichkeiten (D) und (E) richtig.

Richtige Antwort(en): C, D, E

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Malt in einem 5×5 Raster 8 Felder so an, dass jedes angemalte Feld 3 nicht angemalte Felder als Nachbarn hat. Gebt zwei unterschiedliche Lösungen an! Ein Feld ist dann mit einem anderen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. Zwei Lösungen sind dann voneinander verschieden, wenn man aus einem angemalten Raster das andere nicht durch Verschiebung oder Drehung erhalten kann.

Lösung: Unterhalb sind zwei unterschiedliche Lösungen sichtbar. Es können höchstens 2 richtige Lösungen mit Punkten belohnt werden, mit jeweils 8 Punkten pro richtigem Raster.



11. Klasse / 11. Schulstufe

1. Einige Freundinnen, deren Haarfarbe blond, braun oder schwarz ist, sind gemeinsam in Urlaub gefahren. Unter ihnen haben bis auf 3 Mädchen alle blonde, bis auf 4 Mädchen alle braune und bis auf 5 Mädchen alle schwarze Haare. Wie viele Freundinnen könnten in Urlaub gefahren sein?
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Die Anzahl der Mädchen mit braunen und schwarzen Haaren ist zusammen 3, die Mädchen mit blonden und schwarzen Haaren sind zu viert. Das bedeutet, dass es ein Mädchen mehr gibt, das blonde als braune Haare hat. Die Mädchen mit braunem und blondem Haar sind zu fünft, also sind 2 Mädchen mit braunem und 3 Mädchen mit blondem Haar in Urlaub gefahren. Aus der ersten Annahme folgt, dass nur 1 Mädchen unter den Urlaubern schwarzes Haar hat. Insgesamt sind also 6 Mädchen in Urlaub gefahren.

Richtige Antwort(en): C

2. Von vier unterschiedlichen Zahlen haben sechs Jugendliche jeweils immer zwei ausgewählt und miteinander multipliziert. (Keiner hat die gleichen zwei Zahlen gewählt.) Fünf der sechs Jugendlichen erhielten so jeweils eine der folgenden Zahlen als Produkt: 2, 3, 4, 5, 6. Welche Zahl könnte der sechste Jugendliche als Ergebnis erhalten haben?
- (A) 2 (B) 2,2 (C) 2,4 (D) 2,6 (E) 2,8

Lösung: Wenn die vier unterschiedlichen Zahlen a, b, c, d waren, dann lauten die paarweise gebildeten Produkte ab, cd, ac, bd, ad, bc . Es ist zu beobachten, dass sich diese sechs Produkte auf solch eine Weise in drei Paare ordnen lassen, dass wiederum deren Produkt stets gleich $abcd$ ist.

Von den bekannten fünf Ergebnissen ergeben nur $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ dasselbe Produkt, also muss die unbekannte Zahl x die Gleichung $5x = 12$ erfüllen, das gesuchte sechste Ergebnis der Multiplikation ist folglich $x = \frac{12}{5} = 2,4$.

Es gibt tatsächlich vier Zahlen, die diese Produkte ergeben, zum Beispiel $a = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, $b = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $c = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, $d = \sqrt{10}$.

Richtige Antwort(en): C

3. Wir wissen, dass der Graph der Funktionsgleichung $y = ax^2 + c$ die Achsen des Koordinatensystems in drei unterschiedlichen Punkten schneidet, welche die drei Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Welche Zahl könnte dem Produkt ac entsprechen?
- (A) -5 (B) -3 (C) 0 (D) 1 (E) 3

Lösung: Der Graph der Funktion schneidet die y -Achse im Punkt $C(0; c)$ und in den Punkten $A\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}; 0\right)$ sowie $B\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}; 0\right)$ die x -Achse. Also ist

$|\overline{AB}| = 2\sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $|\overline{BC}| = \sqrt{c^2 - \frac{c}{a}}$. Das Dreieck ABC ist gleichseitig, daher $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, folglich

$$2\sqrt{-\frac{c}{a}} = \sqrt{c^2 - \frac{c}{a}}.$$

Nach dem Quadrieren erhalten wir

$$-4\frac{c}{a} = c^2 - \frac{c}{a}.$$

Da der Wert von a nicht 0 sein kann (ansonsten würde es sich nicht um eine Funktion zweiten Grades handeln und sie würde die x -Achse nicht in zwei Punkten schneiden), können wir die vorherige Gleichung mit a multiplizieren: $-4c = ac^2 - c$ beziehungsweise $-3c = ac^2$.

Der Wert von c darf ebenfalls nicht Null sein, da in diesem Fall alle drei Schnittpunkte auf der x -Achse lägen, wodurch kein Dreieck entstehen würde. Also dürfen wir durch c dividieren, wodurch wir folgendes Ergebnis erhalten: $ac = -3$.

Richtige Antwort(en): B

4. Eine Digitaluhr zeigt im 24-Stunden-Modus zwei Zahlen an, die Stunden und die Minuten. Als Benny auf die Uhr sah, war die Differenz dieser beiden Zahlen genau 30 (wir ziehen von der größeren die kleinere Zahl ab). Wie groß könnte die Differenz der Zahlen auf der Uhr gewesen sein, die 30 Minuten später angezeigt wurden?
- (A) 1 (B) 2 (C) 23 (D) 29 (E) 31

Lösung: Die Zahl für die Stunde kann höchstens 23 sein, also wird die Differenz der zwei Zahlen auf solch eine Art 30 betragen, dass die Zahl der Minutenanzeige die größere sein wird. Nennen wir den Zeitpunkt, bei dem die Minutenanzeige um 30 größer als die Stundenanzeige ist, Startpunkt. Wenn 30 Minuten vergangen sind, wird die Minutenanzeige dieselbe Zahl zeigen wie die Stundenanzeige zum Startpunkt. Die Zahl der Stundenanzeige wird um 1 steigen, da die Anzeige zum Startpunkt auf x Stunden und 30 Minuten oder mehr als 30 Minuten stehen muss.

Also muss die Zeitanzeige nach 30 Minuten für die Stunden eine Zahl sein, die im Vergleich zum Startzeitpunkt um 1 erhöht wurde, und für die Minuten dieselbe Zahl, die zum Startzeitpunkt die der Stundenanzeige war. Also ist die Differenz dieser beiden Zahlen nun 1. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, in

dem die Zugabe einer vergangenen Stunde die Zahl an der Stelle der Stunden nicht erhöht. Das ist in folgendem Beispiel der Fall: 23:53 und 00:23. In diesem Fall beträgt die Differenz 23.

Anmerkung: Die Aufgabe ist auch mit einer „Brute-Force-Methode“ lösbar. In diesem Fall werden alle Startpunkte durchprobiert: 00:30, 01:31, ..., 22:52, 23:53.

Richtige Antwort(en): A, C

5. Die Fußballtrikots der Schulmannschaft tragen die Nummern 1 bis 11. Diese Trikots werden im Schulhof an einer Leine getrocknet, jedoch fehlen drei von ihnen. Welche Nummern könnten die fehlenden Trikots tragen, wenn der Durchschnitt der an der Leine hängenden Nummern 7 beträgt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Die Summe aller Nummern auf den Trikots ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$. Wenn der Durchschnitt der 8 Nummern, die auf der Leine hängen, 7 ist, dann ist die Summe ihrer Nummern dasselbe wie $7 \cdot 8 = 56$. Also muss die Summe der fehlenden Nummern $66 - 56 = 10$ sein. Wir wissen, dass $10 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$, daher gibt es vier Möglichkeiten für die fehlenden Trikots, es können fehlen: Jene mit den Nummern 1, 2, und 7, jene mit den Nummern 1, 3 und 6, jene mit den Nummern 1, 4 und 5, oder jene mit den Nummern 2, 3 und 5. Also könnte jede der in den Antwortmöglichkeiten genannten Nummern fehlen.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

6. Susi hat in der folgenden 10×10 Tabelle in jeder Zeile und jeder Spalte jeweils genau eine Zahl eingekreist. Wie viel könnte die Summe der Zahlen ergeben, die Susi eingekreist hat? Wählt aus den untenstehenden Möglichkeiten!
- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | ... | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | ... | 30 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 91 | 92 | 93 | 94 | ... | 100 |

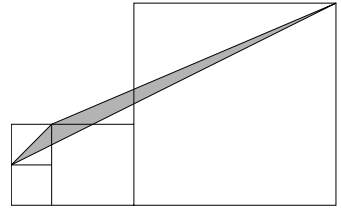
(A) 395 (B) 405 (C) 495 (D) 505 (E) 605

Lösung: Die Zahlen in der Tabelle haben die Form $10(i-1) + j$, wobei $i = 1, 2, \dots, 10$ die Nummern der Zeilen und $j = 1, 2, \dots, 10$ die Nummern der Spalten bezeichnet. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, dass Susi alle Zahlen der Form $10(i-1)$ und alle der Form j eingekreist hat, also ist die eingekreiste Summe immer:

$$0 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + \dots + 9 \cdot 10 + 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 45 \cdot 10 + 55 = 505$$

Richtige Antwort(en): D

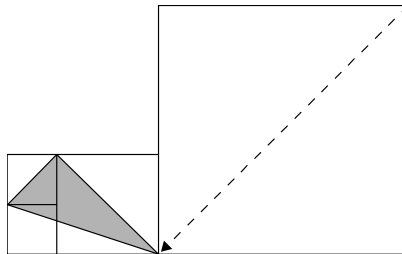
7. Wir haben aus vier Quadraten die folgende Form erstellt (siehe Grafik rechts). Die Seitenlänge der kleinen Quadrate links beträgt jeweils 3 cm , die Seitenlänge des mittleren Quadrats 6 cm , die Maße des Quadrates rechts kennen wir nicht. Wie viele cm^2 könnte die Fläche des grauen Dreiecks betragen? (Die Eckpunkte des Dreiecks liegen auf den Eckpunkten der Quadrate.)



- (A) 15 cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 18 cm^2 (D) 20 cm^2 (E) 24 cm^2

Lösung: Verschieben wir eine Spitze des Dreiecks parallel zu der gegenüberliegenden Seite, verändert sich sein Flächeninhalt nicht, da die Länge der gegenüberliegenden Seite und die dazugehörige Höhe den Flächeninhalt bestimmen und sich diese Werte während dem Verschieben nicht ändern.

Dieses Wissen können wir verwenden, um die Spitze des Dreiecks aus der rechten, oberen Ecke des großen Quadrates so zu verschieben, dass wir den Flächeninhalt leicht berechnen können. In der Grafik ist zu erkennen, dass die „links unten – rechts oben“ Diagonalen aller Quadrate parallel zueinander sind (alle stehen in einem 45° -Winkel zur Horizontalen), also entspricht der Flächeninhalt des untenstehenden grauen Dreiecks dem Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks:



Der Flächeninhalt der zwei kleinen Quadrate beträgt 9 cm^2 , der Flächeninhalt des mittleren Quadrates daneben beträgt 36 cm^2 .

Den Flächeninhalt des neuen Dreiecks erhalten wir, wenn wir von der Fläche des umgebenden Rechtecks $9 + 9 + 36 = 54\text{ cm}^2$ die Flächeninhalte der drei rechtwinkligen Dreiecke subtrahieren (von links oben angefangen lautet dies im Uhrzeigersinn):

$$A = 54 - \frac{9}{2} - \frac{36}{2} - \frac{3 \cdot 9}{2} = 64 - 4,5 - 18 - 13,5 = 54 - 36 = 18\text{ cm}^2.$$

Richtige Antwort(en): C

8. Die Punkte A und B liegen in einer gemeinsamen Ebene. Genau wie viele unterschiedliche Geraden könnte es in dieser Ebene geben, die von A 2 cm und von B 3 cm entfernt liegen?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Die Antwort hängt vom Abstand des Punktes A zum Punkt B ab.

Bei den passenden Geraden handelt es sich um die gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten zweier Kreise, einem Kreis mit Mittelpunkt A und einem Radius von 2 cm sowie einem Kreis mit Mittelpunkt B und einem Radius von 3 cm .

Wenn der Abstand \overline{AB} größer als 5 cm ist, dann gibt es zwei gemeinsame äußere und zwei gemeinsame innere Tangenten, also finden wir vier geeignete Geraden.

Wenn der Abstand \overline{AB} genau 5 cm ist, dann berühren die Kreise einander und es gibt zwei gemeinsame äußere und eine gemeinsame innere Tangente, also drei geeignete Geraden.

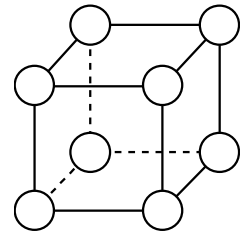
Wenn der Abstand \overline{AB} kleiner als 5 cm ist, jedoch größer als 1 cm , haben die zwei Kreise nur zwei äußere Tangenten, es gibt also zwei geeignete Geraden.

Ist der Abstand \overline{AB} gleich 1 cm , dann schneiden die beiden Kreise einander von innen. In diesem Fall gibt es eine gemeinsame Tangente und somit eine geeignete Gerade.

Ist der Abstand \overline{AB} schließlich kleiner als 1 cm , dann schließt der Kreis mit Mittelpunkt B den Kreis mit Mittelpunkt A ein, also gibt es keine gemeinsame Tangente. In diesem Fall gibt es also keine geeignete Gerade.

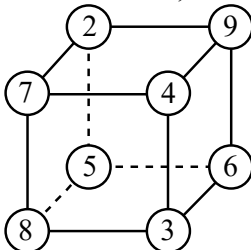
Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

9. Schreibt in die Ecken dieses Würfels jeweils eine Zahl von 1-9 (es darf keine Zahl mehrmals verwendet werden, eine Zahl bleibt übrig), sodass die Summe der vier Zahlen auf einer Seitenfläche für alle Seitenflächen dieselbe ist! Welche der untenstehenden Zahlen könnten bei einer passenden Lösung übrigbleiben und nicht auf dem Würfel stehen?

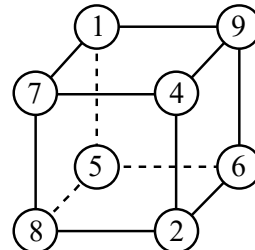


- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

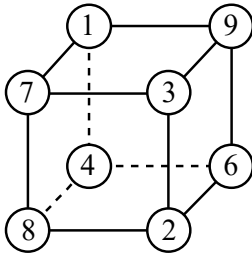
Lösung: Der Würfel lässt sich passend beschriften, egal ob wir die Zahl 1, 3, 5, 7 oder 9 auslassen, wie dies in den folgenden Grafiken verdeutlicht wird:



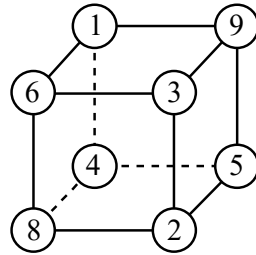
Lassen wir die Zahl 1 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 22.



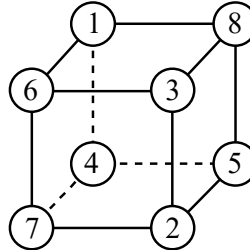
Lassen wir die Zahl 3 aus, ist diese Summe gleich 21.



Lassen wir die Zahl 5 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 20.



Lassen wir die Zahl 7 aus, ist diese Summe gleich 19.



Lassen wir die Zahl 9 aus, ist die Summe auf allen Seitenflächen 18.

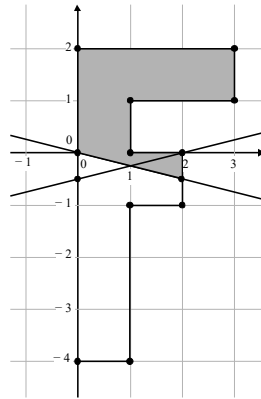
Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

10. In einem Koordinatensystem ist eine Form, die den Buchstaben F darstellt, gegeben, deren Eckpunkte durch folgende Koordinaten beschrieben werden: $(0;2), (3;2), (3;1), (1;1), (1;0), (2;0), (2;-1), (1;-1), (1;-4), (0;-4)$.

Wie viele unterschiedliche lineare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich angeben, deren Funktionsgraphen die Fläche dieses F's halbieren?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) mehr als 4

Lösung: Einen Buchstaben F, der der Angabe entspricht, stellt die folgende Grafik dar. Seine Fläche besteht aus 9 Einheitsflächen. Wir müssen also lineare Funktionen finden, die die Fläche des Buchstaben F in zwei Teile mit einer Fläche von 4,5 teilen. Die zwei gefundenen Funktionsgleichungen sind sehr ähnlich: $y = 0,25x - 0,5$ und $y = -0,25x$. In beiden Fällen haben wir im oberen Teil 4 volle Einheitsquadrate und dazu noch ein Viertel von 2 Quadraten, wodurch die Fläche gleich 4,5 ist.



Es ist offensichtlich, dass der Symmetriepunkt des Rechtecks mit den Ecken $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;-0,5)$ und $(0;-0,5)$ im Punkt $(1;-0,25)$ liegt, in dem sich die beiden Funktionsgraphen schneiden.

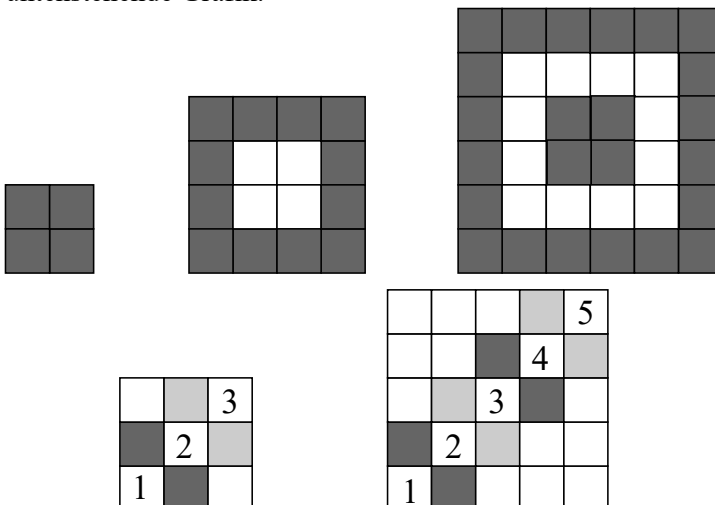
Beginnen wir, den Funktionsgraphen $y = 0,25x - 0,5$ um diesen Punkt zu rotieren, indem die Steigung stetig von $0,25$ auf $-0,25$ sinkt, dann werden all diese Graphen die Fläche des Buchstabens halbieren. So können unendlich viele lineare Funktionen gefunden werden.

Richtige Antwort(en): E

11. In einer $n \times n$ Tabelle haben wir einige Felder rot angemalt, sodass jedes Feld der Tabelle an genau zwei rote Felder grenzt. Welche der untenstehenden Werte könnte n annehmen?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Für die Fälle $n = 2, 4, 6$ gibt es passende Lösungen, diese verdeutlicht die untenstehende Grafik.



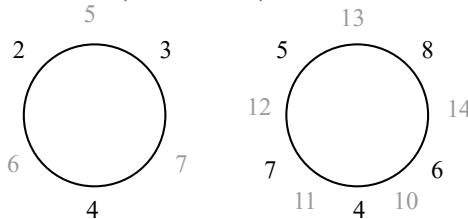
In den Fällen von $n = 3, 5$ können wir die Felder nicht wie gewünscht ausmalen. Sehen wir uns in der Grafik die mit 1, 2, ... bezeichneten Felder an. Das Feld 1 hat zwei Nachbarn, diese müssen wir rot ausmalen. Das Feld 2 hat bereits zwei rote Nachbarn also dürfen wir die anderen beiden nicht mehr rot ausmalen, diese haben wir vorläufig hellgrau gekennzeichnet. In diesem Fall hat das Feld 3 in der 3×3 Tabelle keine roten Nachbarn, also können wir die Tabelle nicht der Aufgabenstellung entsprechend ausmalen. Sehen wir uns die übrigen Felder der 5×5 Tabelle an. Die anderen beiden Nachbarn des Feldes 3 sind rot, diese zwei Felder sind auch mit Feld 4 benachbart, weshalb dieses keine weiteren roten Nachbarn mehr haben darf, diese haben wir wieder hellgrau markiert. So hat aber Feld 5 keine roten Nachbarn. Also können wir die 5×5 Tabelle auch nicht passend ausmalen.

Richtige Antwort(en): A, C, E

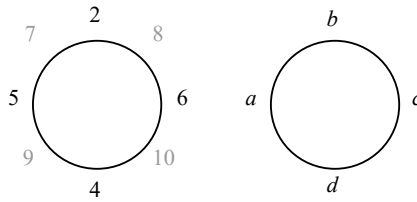
12. Wir haben auf eine Kreislinie aufeinanderfolgende natürliche Zahlen in beliebiger Reihenfolge geschrieben. Anschließend haben wir jeweils die Summe von zwei benachbarten Zahlen berechnet. Ordnen wir diese Ergebnisse der Größe nach, haben wir aufeinanderfolgende Zahlen erhalten. Wie viele Zahlen könnten wir ursprünglich auf die Kreislinie geschrieben haben?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

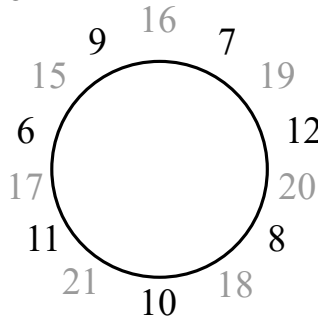
Lösung: Auf der Kreislinie können 3 Zahlen (in der Grafik die Zahlen 2, 3 und 4) oder 5 Zahlen stehen (4, 5, 6, 7, 8).



4 Zahlen können nur auf dem Kreis stehen, wenn sie keine aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen sind, zum Beispiel sind die paarweise berechneten Summen der nicht aufeinanderfolgenden Zahlen 2, 4, 5, 6 wieder aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Wenn wir 4 aufeinanderfolgende Zahlen (a, b, c, d) auf die Kreislinie schreiben, können wir die paarweisen Summen $a + b, b + c, c + d, d + a$ berechnen, von denen wir verlangen, dass sie aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind. In diesem Fall wird die Summe der paarweise berechneten Summen die Form $4k + 2$ annehmen, was $2(a + b + c + d)$ entspricht. Also ist $a + b + c + d = 2k + 1$, also ungerade. Vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen bestehen jedoch immer aus zwei geraden und zwei ungeraden Zahlen, ihre Summe ist demnach gerade. Also wird die vorherige Gleichung nicht erfüllt. Daher können 4 aufeinanderfolgende ganze Zahlen nicht auf der Kreislinie stehen, sodass deren Summen wieder aufeinanderfolgende ganze Zahlen wären.



Den Fall von sechs Zahlen überprüfen wir mit einem ähnlichen Ansatz. Die Summe von sechs aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen (3 gerade, 3 ungerade) ist ungerade. Wenn ich die Summe der paarweise berechneten Summen bilde, ist diese ungerade, jedoch auch das Doppelte der Summe der auf dem Kreis stehenden Zahlen, die eigentlich gerade sein müsste. Also gibt es für sechs Zahlen keine Lösung.



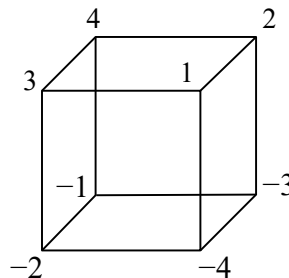
Für 7 Zahlen lässt sich jedoch erneut eine passende Lösung finden, diese wird in der Grafik oberhalb dargestellt.

Richtige Antwort(en): A, C, E

13. Schreibt in jede Ecke eines Würfels jeweils eine von den übrigen verschiedene, ganze Zahl, sodass für so viele Ecken wie möglich gilt: Die Zahl in dieser Ecke ist die Summe der drei Zahlen, die auf den Endpunkten der Kanten stehen, die in dieser Ecke zusammenlaufen. Für höchstens wie viele Ecken kann diese Bedingung erfüllt werden?

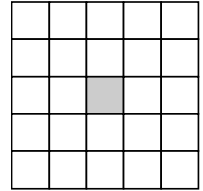
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Das untenstehende Beispiel verdeutlicht, dass die Bedingung für alle 8 Ecken erfüllt werden kann.

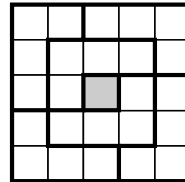
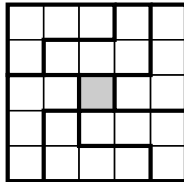


Richtige Antwort(en): E**Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:**

14. In dem 5×5 Gitternetz fehlt das mittlere Quadrat. Zerteilt diese Form entlang der Gitterlinien auf zwei unterschiedliche Arten in 6 Stücke, die die gleiche Form und gleiche Größe haben! (Zwei Lösungsarten gelten als unterschiedlich, wenn man die eine Lösung nicht durch Drehung oder Verschiebung aus der anderen Lösung erhalten kann.)



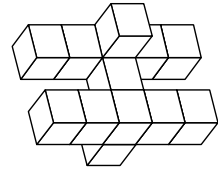
Lösung: Die folgende Abbildung stellt zwei unterschiedliche, korrekte Aufteilungen dar.



Pro korrekte Aufteilung können jeweils 8 Punkte vergeben werden.

12. Klasse / 12. Schulstufe

1. Wir haben dreizehn handelsübliche Spielwürfel so zusammengeklebt, dass die Figur in der Abbildung entstanden ist (bei einem handelsüblichen Spielwürfel beträgt die Summe der Punkte auf zwei gegenüberliegenden Seiten immer 7). Wie viele Punkte können sich höchstens auf der Oberfläche einer solchen Figur befinden?



- (A) 210 (B) 211 (C) 212 (D) 213 (E) 214

Lösung: Bei einem regelmäßigen Spielwürfel befinden sich auf zwei beliebigen gegenüberliegenden Seiten insgesamt immer 7 Punkte (auf einem Würfel insgesamt 21 Punkte). Wir müssen nun diejenigen Würfel clever zusammenkleben, die mit nur einer Seitenfläche an der Figur kleben, oder durch zwei nebeneinanderliegende Seitenflächen mit den übrigen Würfeln verbunden sind. In diesen Fällen müssen wir die Seiten mit nur 1 Punkt beziehungsweise die Seiten mit 1 und 2 Punkten zum Kleben verwenden. Ist ein Würfel durch zwei gegenüberliegende Seiten mit der Figur verbunden, ist es egal, welche Seiten wir zum Kleben verwendet haben, da dann in jedem Fall 7 Punkte zugeklebt wurden.

Anzahl der Würfel	Anzahl der sichtbaren Punkte pro Würfel	insgesamt
6	1-er zugeklebt - 20 Punkte sind sichtbar	120
2	1-er, 2-er, 3-er und 4-er zugeklebt - 11 Punkte sind sichtbar	22
5	zwei gegenüberliegende Seiten wurden zum Kleben verwendet - 14 Punkte sind sichtbar	70

Somit können höchstens $120 + 22 + 70 = 212$ Punkte auf der Oberfläche von solch einer Figur sichtbar sein.

Richtige Antwort(en): C

2. Für eine große Sportveranstaltung kosteten die Tickets jeweils 3000 €. Nachdem dieser Preis gesenkt wurde, stieg die Anzahl der Stadionbesucher um 50%, wodurch die Einnahmen um 35% stiegen. Auf wie viele Euro wurde der neue Ticketpreis gesenkt?

- (A) 2100 (B) 2300 (C) 2500 (D) 2700 (E) 2900

Lösung: Wenn die Sportveranstaltung bei einem Ticketpreis von 3000 € x Stadionbesucher hatte, dann betragen die Einnahmen $3000x$ €. Nach der Preissenkung stieg die Zuschauerzahl um 50%, also

$$x + \frac{50}{100}x = 1,5x,$$

und die Einnahmen stiegen um 35%, also kann man dies als

$$3000x + \frac{35}{100} \cdot 3000x = 3000x + 1050x = 4050x$$

schreiben.

Wenn wir den gesenkten Ticketpreis mit y bezeichnen, lassen sich die Einnahmen auch in der Form $1,5x \cdot y$ aufschreiben. Also ist $1,5xy = 4050x$, beziehungsweise $1,5y = 4050$, also

$$y = \frac{4050}{1,5} = \frac{40500}{15} = 2700.$$

Nachdem wir die Probe durchgeführt haben, sehen wir, dass dieses Ergebnis stimmt. Der Ticketpreis wurde auf 2700 € gesenkt.

Richtige Antwort(en): D

3. Wir haben eine 4×4 Tabelle auf die hier dargestellte Weise mit Zahlen ausgefüllt. Vom linken, oberen Eck der Tabelle aus startend können wir uns nach den folgenden Regeln in der Tabelle bewegen:
- Wir können immer nur auf ein Feld treten, das an einer Kante an das vorherige grenzt,
 - man darf auf jedes Feld nur einmal treten,
 - schließlich müssen wir im Eckfeld rechts unten ankommen.

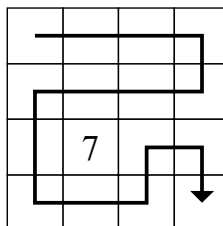
9	10	4	8
12	6	16	2
5	7	1	14
15	13	11	3

Wie viel könnte die Summe der Zahlen auf denjenigen Feldern betragen, die wir auf diese Weise entlang unserer Route betreten haben (inklusive dem Start- und Zielfeld)? Untersucht die untenstehenden Antwortmöglichkeiten!

- (A) 128 (B) 129 (C) 131 (D) 135 (E) 136

Lösung: Wenn wir die Tabelle wie ein Schachbrett ausmalen, werden das Start- und das Zielfeld dieselbe Farbe haben. Da wir entlang unserer Route abwechselnd auf helle und auf dunkle Felder treten, betreten wir um ein Feld mehr in der Farbe des Startfeldes als in der anderen Farbe. Deshalb lassen wir mindestens ein Feld in der anderen Farbe aus.

Von diesen Feldern hat jenes mit 7 den kleinsten Wert. Daher muss jede mögliche Summe um mindestens 7 kleiner sein als die Summe der Zahlen aller Felder.

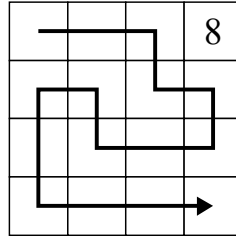


Dass wir von der Summe aller Zahlen tatsächlich nur die 7 verlieren, ist sogar möglich, dies wird zum Beispiel durch die Route in der Abbildung rechts verdeutlicht. Die Summe der Zahlen auf den betretenen Feldern ist dann

$$1 + 2 + \dots + 16 - 7 = \frac{16 \cdot 17}{2} - 7 = 136 - 7 = 129.$$

Somit ist (B) eine richtige Antwort und (C), (D), (E) sind nicht richtig.

Sofern wir statt der 7 die 8 auslassen, also die Route in der Grafik links verwenden, ergibt unsere Summe 128, also ist (A) ebenfalls eine richtige Antwort.



Richtige Antwort(en): A, B

4. Wir haben drei Würfel und nummerieren die Seitenflächen von jedem Würfel auf eine andere Weise. Die Summe der Zahlen auf den Seitenflächen ist bei jedem Würfel dieselbe, und die Beschriftung der Würfel sieht wie folgt aus:

A: (5, 7, 8, 9, 10, 18); **B:** (2, 3, 4, 15, 16, 17); **C:** (1, 6, 11, 12, 13, 14).

Von zwei Würfeln, X und Y , nennen wir den ersten *besser* als den zweiten, wenn wir mit dem ersten Würfel eine größere Chance haben, eine höhere Zahl zu würfeln als mit dem zweiten. Dies kennzeichnen wir so: $X > Y$.

Welche der untenstehenden Beziehungen erfüllen sich?

- (A) $A > B$ (B) $A < B$ (C) $B > C$ (D) $B < C$ (E) $C > A$

Lösung: Werden zwei Würfel geworfen, können wir insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ unterschiedliche Zahlenpaare erhalten. Bei diesen Möglichkeiten wird, wenn wir mit dem Würfel **A** eine 5 würfeln, dieser im Vergleich zum Würfel **B** bei 3 möglichen Ausgängen eine bessere Zahl würfeln (5-2, 5-3, 5-4); wenn wir eine 7 würfeln, ebenfalls bei 3 Ausgängen. Die Zahlen 8, 9, 10, 18 werden der Reihe nach in 3, 3, 3, 6 Fällen die besseren sein. Das sind insgesamt $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 6 = 21$ Fälle.

Die mit dem Würfel **A** geworfenen Zahlen ergeben in 21 Fällen eine bessere Zahl als die mit **B** gewürfelte Zahl. Also wird sich bei mehr als der Hälfte der 36 Möglichkeiten **A** als der bessere Würfel herausstellen, somit ist **A** ein besserer Würfel als **B**.

B ist besser als **C**, da sich die Zahlen auf dem Würfel **B** im Vergleich zu den Zahlen auf **C** in 1, 1, 1, 6, 6, 6 Fällen, also insgesamt 21 Fällen als besser erweisen.

C ist besser als **A**, da sich die Zahlen auf dem Würfel **C** im Vergleich zu den Zahlen auf **A** in 0, 1, 5, 5, 5, 5 Fällen, also insgesamt 21 Fällen als besser erweisen.

(Eine spannende Beobachtung ist, dass bei dieser Relation aus den Beziehungen $A > B$ und $B > C$ nicht folgt, dass $A > C$, sondern genau umgekehrt: $C > A$.)

Richtige Antwort(en): A, C, E

5. Ich nehme von jeder Zahl 1, 2, 3, ..., n jeweils zwei Stück und schreibe sie in solch einer Reihenfolge auf, dass zwischen den zwei 1-ern jeweils 1 Ziffer, zwischen den zwei 2-ern jeweils 2 Ziffern, zwischen den zwei 3-ern jeweils 3 Ziffern stehen, und so weiter. Welchen Wert könnte n annehmen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

Lösung: Die Zahlenfolgen 312132 und 23421314 zeigen, dass n die Werte 3 oder 4 annehmen kann.

Nehmen wir an, dass wir die Zahlen auch für $n = 5$ passend aufschreiben könnten. In diesem Fall schreiben wir 10 Ziffern auf. Lasst uns diese abwechselnd mit grün und rot schreiben. An allen ungeraden Stellen stehen rote Zahlen, an allen geraden Stellen grüne. Wegen der Bedingungen in der Aufgabenstellung wird eine der 2er rot sein, während die andere 2 grün ist. So ist auch eine der 4er rot, während die andere 4 grün ist. Währenddessen haben die ungeraden Zahlen aber dieselbe Farbe, genauer gesagt haben alle 1er dieselbe Farbe, alle 3er dieselbe Farbe und die zwei 5er ebenfalls dieselbe Farbe. Es gibt 5 rote und 5 grüne Zahlen, doch das kann nicht stimmen, denn wir haben jeweils eine rote 2 und eine rote 4. Die übriggebliebenen 3 Zahlen können jedoch nicht rot sein, da wir die ungeraden Zahlen immer paarweise rot oder grün gewählt haben: Es dürfte also zum Beispiel ausschließlich zwei rote 1er und zwei rote 5er geben.

Genauso kann auch $n = 6$ nicht stimmen, denn in diesem Fall gibt es 6 rote Zahlen, wobei es aber jeweils eine rote 2, 4 und 6 gibt, die übriggebliebenen 3 Zahlen können aber nicht rot sein, da die ungeraden Zahlen immer paarweise rot oder grün sind.

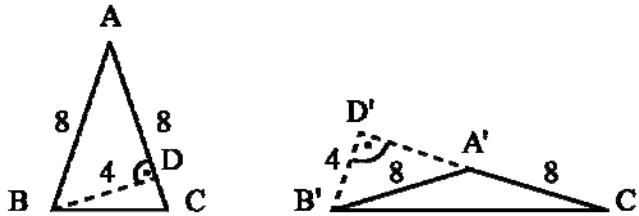
Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass auch $n = 9$ nicht stimmen kann. Dann sind von 9 roten Zahlen 4 gegeben (2, 4, 6 und 8), die übrigen 5 Zahlen können sich jedoch nicht aus den paarweisen roten oder grünen ungeraden Zahlen ergeben.

Richtige Antwort(en): A, B

6. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind 8 cm lang, die zu den Schenkeln gehörenden Höhen sind 4 cm lang. Wieviel Grad könnte ein beliebiger Innenwinkel dieses Dreiecks von den untenstehenden Werten betragen?

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75°

Lösung: Das Dreieck kann spitzwinklig sein (in diesem Fall trifft die zu dem Schenkel gehörende Höhe auf den Schenkel, siehe die Grafik links) oder stumpfwinklig (in diesem Fall trifft die zu dem Schenkel gehörende Höhe auf die Verlängerung des Schenkels, siehe die Grafik rechts).



Spiegeln wir das Dreieck ABD an AD , erhalten wir ein gleichseitiges Dreieck, also ist $\sphericalangle BAD = 30^\circ$, woraus folgt, dass

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ.$$

Spiegeln wir das Dreieck $B'A'D'$ an $A'D'$, erhalten wir ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck, woraus folgt, dass $\sphericalangle D'A'B' = 30^\circ$, und somit $\sphericalangle B'A'C' = (180^\circ - 30^\circ) = 150^\circ$. Daraus folgt wiederum, dass

$$\sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle A'C'B' = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ.$$

Die Innenwinkel des Dreiecks können also folgende Werte annehmen: 30° , 75° , 75° oder 150° , 15° , 15° .

Richtige Antwort(en): A, B, E

7. Wir haben 1000 Münzen und wissen, dass 100 von ihnen gefälscht sind. Wir kennen das Gewicht der echten Münzen und wissen, dass die gefälschten leichter sind als die echten, das Gewicht der gefälschten Münzen kann aber variieren. Wir möchten eine gefälschte Münze mit einer elektrischen Küchenwaage identifizieren. In jedem Schritt messen wir das Gesamtgewicht einiger Münzen, dadurch können wir bestimmen, ob sich unter den Münzen auf der Waage gefälschte befinden. Mindestens wie viele solche Messungen benötigen wir, um sicherlich eine gefälschte Münze zu identifizieren?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

Lösung: Mit der üblichen Halbierungsmethode können wir mit 10 Messungen sicherlich eine gefälschte Münze identifizieren. Wir zeigen jedoch, dass 9 Messungen nicht ausreichend sind.

Nehmen wir an, dass es ein Verfahren mit höchstens 9 Messungen gibt, das eine Münze auswählt. Dabei beschränken wir uns jetzt auf rein deterministische Verfahren; bei Verfahren, die zufällige Auswahlen beinhalten, können wir für jede zufällige Entscheidung bereits im Vorhinein eine gegebene Wahl festlegen.

Alle möglichen Ausführungen dieses Verfahrens können wir in jeweils eine, aus höchstens 9 ja/nein Gliedern bestehende Folge kodieren. Für jene Fälle, bei denen das Verfahren bei weniger als 9 Messungen endet, vervollständigen wir die fehlenden Glieder der ja/nein Reihe mit „ja“. So haben wir zu allen möglichen Ausführungen des Verfahrens immer eine genau aus 9 ja/nein Gliedern bestehende Reihe zugeordnet.

Da es nur $2^9 = 512$ ja/nein Reihen gibt, kann dieses Verfahren auch nur

höchstens 512 unterschiedliche Ergebnisse haben, also kann das Verfahren nur 512 Münzen auswählen. Wenn sich die gefälschten Münzen unter den übrigen 488 Münzen befinden, dann ergibt dieses Verfahren keine richtige Lösung.

Richtige Antwort(en): C

8. Ich habe auf eine zuvor leere Tafel vier Vierecke gezeichnet. Marcel meint, dass mindestens drei Trapeze auf der Tafel sind, Mike meint, dass mindestens drei Rechtecke auf der Tafel sind, und Benny meint, dass mindestens drei Rauten auf der Tafel sind. Von den Jungs haben zwei Recht, einer hat sich geirrt. Wie viele Quadrate könnten sich auf der Tafel befinden?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Wenn ich 3 oder 4 Quadrate gezeichnet habe, dann haben alle drei Jungs recht, was aber wegen den Bedingungen der Aufgabenstellung nicht möglich ist.

Wenn 2 Quadrate, 1 Raute (die kein Quadrat ist) und ein solches Viereck, welches kein Trapez ist, auf der Tafel stehen, dann haben Marcel und Benny Recht und Mike hat sich geirrt. Es könnten also 2 Quadrate sein.

Wenn 1 Quadrat, 2 Rechtecke (die keine Quadrate sind) und 1 solches Viereck, welches kein Trapez ist, auf der Tafel stehen, haben Marcel und Mike Recht und Benny hat sich geirrt. Also könnte auch 1 Quadrat auf der Tafel stehen.

Wenn 3 Rechtecke (die keine Quadrate sind) und 1 solches Viereck, welches kein Trapez ist, auf der Tafel stehen, dann haben Marcel und Mike Recht und Benny hat sich geirrt. Es ist also auch möglich, dass sich auf der Tafel gar kein Quadrat befindet.

Richtige Antwort(en): A, B, C

9. Es ist eine 20×20 Tabelle gegeben, in der wir 19 Felder zufällig markiert haben. In einem Schritt können wir jeweils zwei Zeilen oder zwei Spalten vertauschen. Bei wie vielen markierten Feldern kann durch solche Schritte erreicht werden, dass sich diese zur selben Zeit alle unter der Hauptdiagonale der Tabelle befinden? (Die Hauptdiagonale der Tabelle verbindet die linke obere Ecke mit der rechten unteren Ecke.)

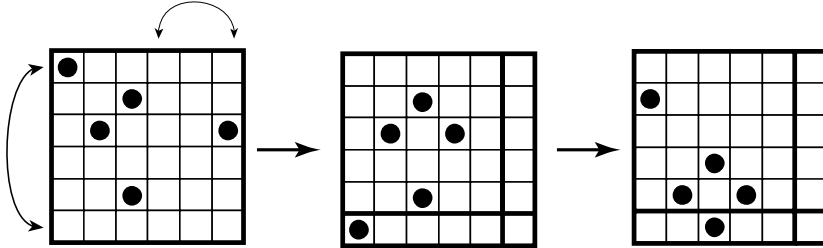
(A) 9 (B) 10 (C) 13 (D) 16 (E) 19

Lösung: Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass, wenn in einer $n \times n$ Tabelle $n-1$ Felder markiert wurden, all diese $n-1$ Felder mit den vorgegebenen Schritten unter die Hauptdiagonale gebracht werden können.

Es sei k die Anzahl der markierten Felder. Dann ist also $n > k$. Wenn $k = 0$, dann wurde kein Feld markiert und die Aussage ist trivial. Nehmen wir an, dass $k \geq 1$ ist, und diese Aussage für Werte kleiner k wahr ist.

Da es mehr Spalten als markierte Felder gibt, gibt es Spalten, in denen gar ke-

in Feld markiert wurde. Lasst uns die letzte Spalte mit solch einer Spalte vertauschen! Anschließend vertauschen wir die letzte Zeile mit einer Zeile, in der mindestens ein Feld markiert wurde.



In dem oberen, linken, $(n-1) \times (n-1)$ großen Teil der Tabelle können $k-1 < n-1$ Felder markiert sein. Laut der Induktionsannahme können wir diese unter die Hauptdiagonale bringen, indem wir nur die ersten $n-1$ Zeilen und Spalten umsortieren. Im Endzustand bleibt folglich die letzte Spalte leer und in den $n-1$ Spalten gibt es weder auf der Hauptdiagonale noch darüber markierte Felder.

Richtige Antwort(en): A, B, C, D, E

10. Bei einem konvexen Viereck sind die Längen von drei Seiten bekannt: 9 cm , 15 cm und 16 cm ; die Diagonalen stehen senkrecht zueinander. Wie viele cm lang könnte die vierte Seite sein?

(A) $\sqrt{50}\text{ cm}$ (B) $\sqrt{112}\text{ cm}$ (C) 12 cm (D) $\sqrt{252}\text{ cm}$ (E) 20 cm

Lösung: Da die Diagonalen des Vierecks senkrecht zueinander stehen, können wir in den vier rechtwinkligen Dreiecken den Satz des Pythagoras aufstellen und erhalten somit:

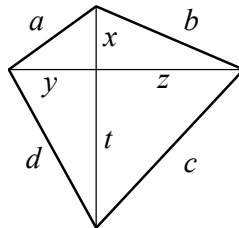
$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b^2 + d^2.$$

Für die vierte Seite gibt es drei Möglichkeiten, je nachdem welche Seite gegenüberliegt. So erhalten wir folgende drei Lösungen:

$$9^2 + 15^2 = 16^2 + x^2, \text{ daraus folgt } x = \sqrt{50}\text{ cm}.$$

$$9^2 + 16^2 = 15^2 + x^2, \text{ daraus folgt } x = \sqrt{112}\text{ cm}.$$

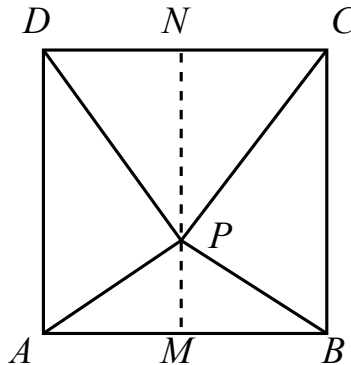
$$15^2 + 16^2 = 9^2 + x^2, \text{ daraus folgt } x = 20\text{ cm}.$$



Richtige Antwort(en): A, B, E

11. Im Quadrat $ABCD$ ist P ein solcher innerer Punkt, für den gilt $|\overline{PA}| = 1 \text{ cm}$, $|\overline{PB}| = \sqrt{2} \text{ cm}$ und $|\overline{PC}| = \sqrt{3} \text{ cm}$. Wie viele Grad könnte der Winkel $\sphericalangle APB$ betragen?
- (A) 90° (B) 100° (C) 105° (D) 110° (E) 120°

Lösung: Es sei M die orthogonale Projektion des Punktes P auf AB und N die orthogonale Projektion des Punktes P auf CD .



Dann gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} |\overline{PB}|^2 - |\overline{PA}|^2 &= (|\overline{PM}|^2 + |\overline{MB}|^2) - (|\overline{PM}|^2 + |\overline{MA}|^2) = |\overline{MB}|^2 - |\overline{MA}|^2 \\ &= |\overline{NC}|^2 - |\overline{ND}|^2 = (|\overline{PC}|^2 - |\overline{PN}|^2) - (|\overline{PD}|^2 - |\overline{PN}|^2) = |\overline{PC}|^2 - |\overline{PD}|^2. \end{aligned}$$

Wenn wir von der so erhaltenen Gleichung

$$|\overline{PB}|^2 - |\overline{PA}|^2 = |\overline{PC}|^2 - |\overline{PD}|^2$$

drei Glieder kennen, können wir das vierte Glied berechnen:

$$(\sqrt{2})^2 - 1 = (\sqrt{3})^2 - |\overline{PD}|^2$$

und erhalten somit

$$|\overline{PD}| = \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Betrachten wir die Dreiecke ABP und APD , erkennen wir, dass die passenden Seitenpaare immer gleich groß sind, also sind die zwei Dreiecke kongruent. Daraus folgt, dass PA den rechten Winkel bei A halbiert, also beträgt $\sphericalangle MAP$ und dadurch auch $\sphericalangle APM = 45^\circ$.

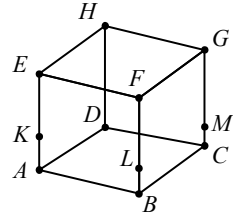
Die Hypotenuse des gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks AMP beträgt 1 cm , daraus können wir berechnen, dass die Katheten jeweils $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$ lang sind.

Aus alledem folgt, dass im rechtwinkligen Dreieck MBP die Seite

$|\overline{PM}| = \frac{1}{2}|\overline{PB}|$ ist, wenn wir also das Dreieck MBP an MB spiegeln, dann entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Daher ist $\sphericalangle MPB = 60^\circ$.
Somit ist $\sphericalangle APB = \sphericalangle APM + \sphericalangle MPB = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

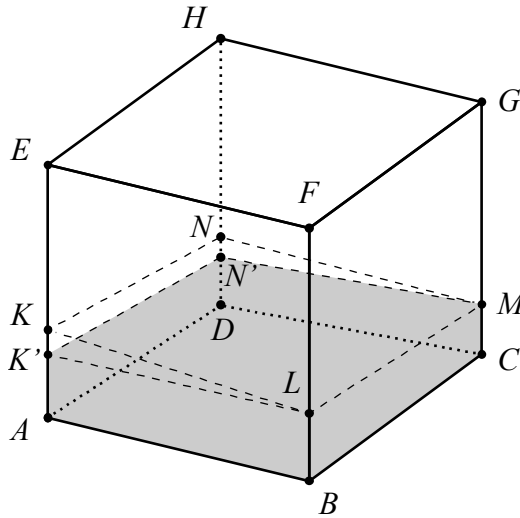
Richtige Antwort(en): C

12. Bei dem auf einem Tisch stehenden Würfel $ABCDEFGH$ werden drei vertikale Kanten durch die Punkte K, L und M jeweils im Verhältnis 1:3, 1:4 beziehungsweise 1:5 geteilt, wie dies die Grafik zeigt. Die Ebene KLM teilt den Würfel in zwei Teile. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden so entstandenen Teile zueinander?



- (A) 1:24 (B) 9:40 (C) 4:15 (D) 4:11 (E) 11:15

Lösung: Man kann annehmen, dass die Kanten des Würfels eine Einheit lang sind. In diesem Fall ist $|\overline{AK}| = \frac{1}{4}$, $|\overline{BL}| = \frac{1}{5}$, $|\overline{CM}| = \frac{1}{6}$. Es sei N ein Punkt auf der Kante \overline{DH} , für den gilt $|\overline{DN}| = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$. Dann ist $|\overline{LM}| = |\overline{KN}|$, also sind die Punkte K, L, M, N planar, was bedeutet, dass die Ebene KLM die Kante \overline{DH} im Punkt N schneidet. Lasst uns die Punkte K und N nach unten um die Distanz $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ verschieben. Dann gelangen wir bei den Strecken $\overline{AK'}$ beziehungsweise $\overline{DN'}$ zu jenen Punkten K', N' , für die gilt $|\overline{AK'}| = |\overline{BL}| = \frac{1}{5}$, $|\overline{DN'}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{6}$. Da $|\overline{LM}| = |\overline{KN}| = |\overline{K'N'}|$, sind die Punkte K, K', L, N, N', M die Spitzen von solch einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche, dessen Höhe 1 beträgt, und dessen Grundfläche das Dreieck $KK'L$ ist, dessen Fläche $\frac{|\overline{KK'}| \cdot |\overline{AB}|}{2} = \frac{1}{40}$ beträgt, also beträgt das Volumen des Prismas $\frac{1}{40}$ Einheiten.



Entfernen wir vom unter der Ebene $KLMN$ liegenden Teil des Würfels dieses Prisma, erhalten wir das gerade Prisma $BCMLADN'K'$, dessen Höhe 1 beträgt, und dessen Grundfläche das Trapez $BCML$ mit einer Fläche von

$$\frac{(|\overline{LB}| + |\overline{CM}|) \cdot |\overline{BC}|}{2} = \frac{11}{60} \text{ Flächeneinheiten ist. Somit beträgt das Volumen}$$

dieses Prismas $\frac{11}{60}$ Volumeneinheiten.

Das Volumen des Würfelteils unter der Ebene $KLMN$ beträgt also

$$\frac{1}{40} + \frac{11}{60} = \frac{25}{120} = \frac{5}{24} \text{ Volumeneinheiten. Das Volumen des Würfelteils über}$$

der Ebene $KLMN$ beträgt demnach $\frac{19}{24}$ Volumeneinheiten, und somit ist das

Verhältnis der beiden Volumina 5:19.

Richtige Antwort(en): -

13. Von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 20 (den ersten 20 positiven ganzen Zahlen) haben wir 15 Zahlen ausgesucht und diese so in Dreiergruppen eingeteilt, dass die Summe der Zahlen in diesen Gruppen immer dieselbe war. Wie groß könnte diese Summe gewesen sein?

(A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 25 (E) 40

Lösung: Die Summe der kleinsten wählbaren 15 Zahlen (1, 2, 3, ..., 15) ist 120. Daher kann die Summe in den Zahlentripeln nicht 20 betragen, da dann die Gesamtsumme der 15 gewählten Zahlen 100 betragen müsste, obwohl wir wissen, dass diese Gesamtsumme mindestens 120 betragen muss. Wegen derselben Begründung kann die Summe in den Zahlentripeln auch nicht 22 betragen.

Die Summe kann nur dann 24 betragen, wenn wir die Zahlen 1, 2, ..., 15 wäh-

len, da $5 \cdot 24 = 120$. Die Zahlen können tatsächlich passend gewählt werden:

(1, 10, 13), (2, 8, 14), (3, 9, 12), (4, 5, 15), (6, 7, 11).

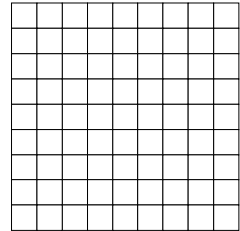
Wenn wir in den vorherigen Zahlentripeln jeweils die größte Zahl um 1 erhöhen, finden wir ebenfalls passende Gruppierungen: Die fünf Zahlentripel werden aus 15 unterschiedlichen Zahlen bestehen, unter denen keine größer als 20 ist und die Summe in allen Zahlentripeln ist dieselbe, nämlich 25.

Wenn wir von den Zahlen 1, 2, ..., 20 die größten 15 Zahlen wählen (6, 7, 8, ..., 20), dann ist deren Summe 195. Also kann man keine 15 Zahlen auswählen, deren Summe in Dreiergruppen jeweils 40 ergeben würde, da $5 \cdot 40 = 200 > 195$. Also kann die Summe nicht 40 betragen.

Richtige Antwort(en): C, D

Aufgabe zur detaillierten Ausarbeitung:

14. Zerteilt das 9×9 Feld entlang der Gitternetzlinien in drei Teilstücke mit gleich großer Fläche, wobei die Summe der Umfänge von zwei Teilstücken gleich dem Umfang des dritten Teilstücks sein soll! Findet zwei unterschiedliche Lösungen!



Lösung: Unterhalb sind drei mögliche Zerteilungen zu sehen. Insgesamt können für zwei richtige Zerteilungen jeweils 8 Punkte vergeben werden, insgesamt also höchstens 16 Punkte.

