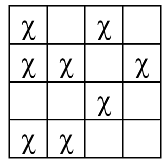
„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb
3. Klasse / 3. Schulstufe

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

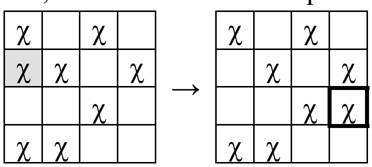
Jahr 2015

4. Die Figur zeigt 8 Grashüpfer. Wie viele von ihnen können in ein neues Feld springen, so dass sich anschließend in jeder Reihe und jeder Spalte genau 2 Grashüpfer befinden?

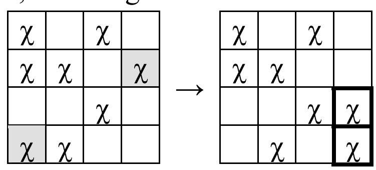


(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4* **(E)** *5*

Lösung: Alle fünf Antworten sind möglich. Erklärung zu den folgenden Figuren: Die Felder, von denen die Grashüpfer wegspringen, sind schraffiert. Die Felder, auf denen die Grashüpfer ankommen, sind eingerahmt.



1 Grashüpfer springt



2 Grashüpfer springen

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass die Lösungen (A) und (B) möglich sind. Weitere Lösungen ergeben sich mit folgender Idee: Wenn zwei von denen, die bis jetzt nicht gesprungen sind, zusätzlich die Plätze tauschen, ist die Bedingung immer noch erfüllt. Damit erhöht sich die Anzahl der Grashüpfer um 2. Die rechte Figur liefert damit eine Lösung für 4 Grashüpfer (2 + 2). Die linke Figur liefert eine Lösung für 3 Grashüpfer (1 + 2). Tauschen in dieser letzten Lösung zwei weitere Grashüpfer die Plätze, erhalten wir eine Lösung mit 5 Grashüpfern (3 + 2).

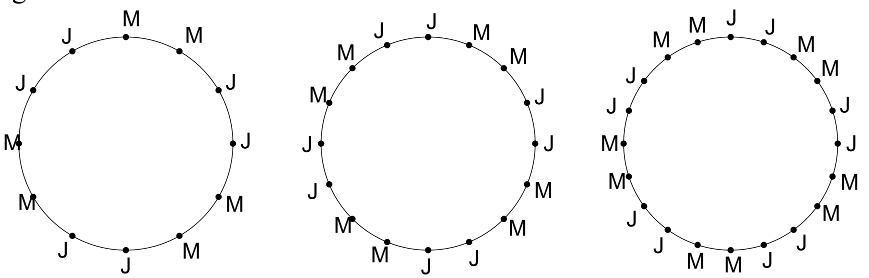
(A) 21% **(B) 36%** **(C) 43%** **(D) 7%** **(E) 0%**

Jahr 2016

10. Wie viele Jungen und Mädchen können so um einen runden Tisch gesetzt werden, dass alle Kinder mindestens ein Mädchen als Nachbar haben?

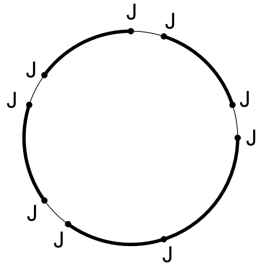
(A) *6 Jungen und 6 Mädchen* **(B)** *8 Jungen und 8 Mädchen*
(C) *9 Jungen und 9 Mädchen* **(D)** *10 Jungen und 10 Mädchen*
(E) *11 Jungen und 11 Mädchen*

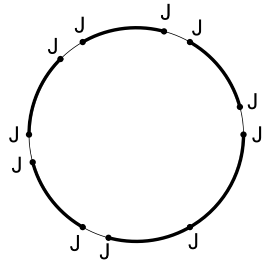
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass (A), (B) und (D) Lösungen sind. Dazu haben wir jeweils eine passende Figur angefertigt, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen.



6 Jungen und 6 Mädchen 8 Jungen und 8 Mädchen 10 Jungen und 10 Mädchen

In **Teil 2** zeigen wir, dass (C) und (E) keine Lösungen sind.
Im *1. Schritt* kommen wir zu mehreren Feststellungen.
1. Feststellung: Es können nicht mehr als zwei Jungen nebeneinander sitzen. Begründung: Bei drei Jungen hätte der mittlere Junge kein Mädchen als Nachbar.
2. Feststellung: An keiner Stelle kann die Sitzreihenfolge Junge – Mädchen – Junge auftreten. Begründung: Das Mädchen hätte kein Mädchen als Nachbar.
Aus der 2. Feststellung folgt:
3. Feststellung: Zwischen zwei Jungen sitzt entweder kein Mädchen oder sitzen mindestens 2 Mädchen.
Beachte: Bei mehr als zwei Mädchen ist die Bedingung „alle Kinder haben mindestens ein Mädchen als Nachbar” ebenfalls erfüllt. Beispiel: JMMMMJ.
Im *2. Schritt* untersuchen wir den Fall von 9 Jungen und 9 Mädchen. Wenn so oft wie möglich zwei Jungen nebeneinander sitzen, entstehen 5 „Lücken” (auf der Figur fett markiert). Laut der 3. Feststellung müssten in einer solchen Lücke mindestens 2 Mädchen sitzen, insgesamt also mindestens $5 \cdot 2 = 10$ Mädchen. Da es aber nur 9 Mädchen gibt, ist keine Lösung möglich.
Im *3. Schritt* untersuchen wir den Fall von 11 Jungen und 11 Mädchen. Wenn so oft wie möglich zwei Jungen nebeneinander sitzen, entstehen 6 „Lücken” (auf der Figur fett markiert). Laut der 3. Feststellung müssten in einer solchen Lücke mindestens 2 Mädchen sitzen, insgesamt also mindestens $6 \cdot 2 = 12$ Mädchen. Da es nur 11 Mädchen gibt, ist keine Lösung möglich.



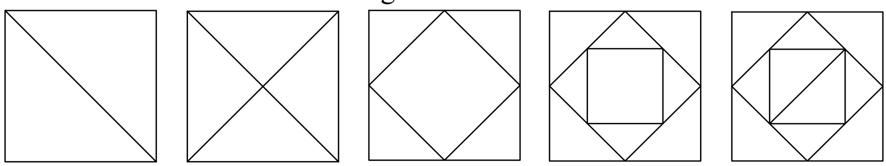


9 Jungen und 9 Mädchen? 11 Jungen und 11 Mädchen?

(A) 72% **(B) 46%** **(C)** 30% **(D) 49%** **(E)** 27%

Jahr 2017

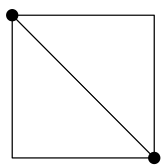
1. Welche der folgenden Figuren kann man zeichnen ohne dabei den Bleistift abzuheben *und* ohne eine bereits gezeichnete Linie erneut nachzufahren?



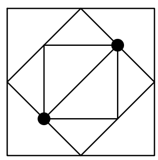
(A) **(B)** **(C)** **(D)** **(E)**

Lösung: In **Teil 1** begründen wir, wie man **(A)**, **(C)**, **(D)** und **(E)** zeichnen kann.

(A): Dazu muss man an einem der markierten Punkte aus *Figur 1* anfangen.



Figur 1



Figur 2

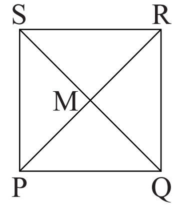
(C) kann man z. B. so zeichnen: Zuerst zeichnet man das kleinere Quadrat, anschließend das größere Quadrat.

(D) kann man z. B. so zeichnen: Zuerst zeichnet man das kleine Quadrat, dann einen Teil des mittelgroßen Quadrates, nachher das größte Quadrat und anschließend den Rest des mittelgroßen Quadrates.

(E) kann man z. B. so zeichnen: Zuerst zeichnet man das kleine Quadrat, samt Diagonale, dann einen Teil des mittelgroßen Quadrates, nachher das größte Quadrat und anschließend den Rest des mittelgroßen Quadrates.

<u>Beachte</u>: Bei (E) muss man bei einem der markierten Punkte aus *Figur 2* anfangen. Bei (C) und (D) kann man bei jedem Punkt anfangen zu zeichnen.

In **Teil 2** begründen wir, warum man (B) nicht zeichnen kann. Wir starten einen Versuch: P – Q – R – P – S – R. Ab hier aber können wir nicht weiterzeichnen, ohne eine bereits gezeichnete Linie nachzufahren (siehe *Figur 3*). Die Strecke SQ wurde jedoch noch nicht gezeichnet.
Jeder andere Versuch scheitert ähnlich.
Anregung: Der geneigte Leser möge es selbst ausprobieren.



Figur 3

(A) 99% **(B)** 10% **(C) 71%** **(D) 28%** **(E) 12%**

Jahr 2018

8. Ein Kind lügt montags, dienstags und freitags. An den anderen Wochentagen sagt er die Wahrheit. An welchen Wochentagen konnte das Kind folgenden Satz gesagt haben?
„Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.”

(A) *Montag* **(B)** *Dienstag* **(C)** *Mittwoch* **(D)** *Donnerstag* **(E)** *Freitag*

Lösung: Zunächst veranschaulichen wir die Wochentage. Wir betrachten eine volle Woche und noch zwei Tage vorher und zwei Tage nachher.

Sa. So. *Mo.* *Di.* Mi. Do. *Fr.* Sa. So. *Mo.* *Di.*

Jene Tage, an denen das Kind *lügt*, wurden *kursiv* dargestellt.
Nun untersuchen wir den Satz an allen aufgezählten Wochentagen.
Montag: Vorgestern ist Samstag und übermorgen ist Mittwoch. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.” ist eine Lüge. Da das Kind *montags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Dienstag: Vorgestern ist Sonntag und übermorgen ist Donnerstag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.” ist eine Lüge. Da das Kind *dienstags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Mittwoch: Vorgestern ist *Montag* und übermorgen ist *Freitag*. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.” ist wahr. Da das Kind mittwochs die Wahrheit sagt, konnte es den Satz gesagt haben.
Donnerstag: Vorgestern ist *Dienstag* und übermorgen ist Samstag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.” kann nicht wahr sein, denn am Samstag lügt das Kind nicht. Der Satz ist also gelogen. Da das Kind donnerstags aber nicht lügt, kann es den Satz am Donnerstag nicht gesagt haben.
Freitag: Vorgestern ist Mittwoch und übermorgen ist Sonntag. Der Satz „Vorgestern log ich und übermorgen werde ich ebenfalls lügen.” ist eine Lüge. Da das Kind *freitags* lügt, konnte es den Satz gesagt haben.
Bemerkung: Man kann begründen, dass das Kind den Satz auch am Sonntag hätte sagen können.
Anregung: Der geneigte Leser möge dies zeigen.

(A) 10% **(B) 9%** **(C) 79%** **(D)** 20% **(E) 8%**