„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2018

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

11. Klasse / 11. Schulstufe

3. Im Parlament von Neidland sitzen 100 Abgeordnete. Es gibt keine zwei Abgeordnete, die dasselbe Gehalt haben. Im Plenarsaal stehen 100 Stühle in einem Quadrat mit 10 Reihen und 10 Spalten. Jeder Abgeordnete kennt die Gehälter seiner direkten Nachbarn: rechts, links, vorne, hinten und auch diagonal benachbart (jeder hat also bis zu 8 Nachbarn – diejenigen, die am Rand sitzen, etwas weniger). Nur jene Abgeordnete sind mit ihrem Gehalt zufrieden, die höchstens einen direkten Nachbar haben, der mehr verdient als sie selbst. **Die Frage**: Insgesamt wie viele der 100 Abgeordneten können mit ihrem Gehalt zufrieden sein?

(A) *2* **(B)** *6* **(C)** *10* **(D)** *50* **(E)** *60*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **2**, **6**, **10** und **50** Lösungen sind. Dazu geben wir jeweils ein passendes Beispiel an. Erläuterungen zu den Tabellen: Die 100 unterschiedlichen Gehälter wurden von 1 bis 100 in steigender Reihenfolge durchnummeriert. Die schraffierten Felder stehen für zufriedene Abgeordnete.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	84	85	88	89	92	93	96	97	98
82	83	86	87	90	91	94	95	99	100

2 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	84	85	88	89	90	91	92	93	94
82	83	86	87	95	96	97	98	99	100

6 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

10 zufriedene Abgeordnete

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

50 zufriedene Abgeordnete

In **Teil 2** zeigen wir, dass 60 <u>keine</u> Lösung darstellt. Dazu zerlegen wir die 100 Sitze in 25 quadratische Bereiche der Form 2×2. In jedem solchen Bereich sitzen vier benachbarte Abgeordnete. Von diesen vier können jedoch höchstens zwei zufrieden sein: Der, mit dem höchsten und der mit dem zweithöchsten Gehalt in diesem Bereich (die anderen zwei haben mehr als einen Nachbar, der besser verdient als sie). Insgesamt können also höchstens $25 \cdot 2 = 50$ Abgeordnete zufrieden sein. Daraus folgt, dass 60 <u>keine</u> Lösung ist.

(A) 31% **(B) 33%** **(C) 45%** **(D) 50%** **(E)** 6%

13. Alle Felder eines 10×10 Schachbrettes wurden so gefärbt, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens 5 verschiedene Farben befinden. Insgesamt wie viele verschiedene Farben konnten dazu verwendet werden?

(A) *40* **(B)** *41* **(C)** *42* **(D)** *43* **(E)** *44*

Lösung: In **Teil 1** beweisen wir, dass **41** eine Lösung ist. Dazu geben wir ein Beispiel an (siehe Figur). Die ersten 40 Farben wurden von 1 bis 40 durchnummeriert, die leerstehenden Felder haben die 41-te Farbe:

1	2	3	4						
	5	6	7	8					
		9	10	11	12				
			13	14	15	16			
				17	18	19	20		
					21	22	23	24	
						25	26	27	28
32							29	30	31
35	36							33	34
38	39	40							37

In **Teil 2** zeigen wir, dass **40** eine Lösung ist. Beispiel: In der obigen Figur ersetzen wir Farbe 1 durch Farbe 2 (ansonsten ändern wir nichts).
In **Teil 3** zeigen wir, dass 42 keine Lösung ist.
1. Feststellung: In jeder Reihe gibt es höchstens 5 Farben.
2. Feststellung: In jeder Spalte gibt es höchstens 5 Farben.
Die Idee der Beweisführung für Teil 3: Wir untersuchen, was es bedeuten würde, wenn wir 42 Farben hätten. Unter dieser Annahme gilt:
3. Feststellung: Es gibt mindestens 2 Reihen mit je 5 (verschiedenen) Farben, die in keiner anderen Reihe vorkommen. Begründung: Wenn es in höchstens einer Reihe 5 Farben gäbe, dann hätten wir höchstens $9 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 41$ Farben verbraucht (in 9 Reihen höchstens 4 verschiedene Farben und in einer Reihe 5 Farben) – also weniger als 42.
4. Feststellung: In den 2 Reihen aus der 3. Feststellung gibt es genau 10 Farben (siehe 3. Feststellung).
5. Feststellung: Beide Reihen aus der 3. und 4. Feststellung sind je mit genau 5 verschiedenen Farben gefärbt.
6. Feststellung: In jeder Spalte haben die zwei Felder aus den 2 Reihen aus der 3. und 4. Feststellung unterschiedliche Farben.
7. Feststellung: In jeder der 10 Spalten können außer den 10 Farben aus der 4. Feststellung höchstens je 3 andere Farben auftreten (siehe 2. Feststellung).
8. Feststellung: In den 10 Spalten können höchstens $10 + 10 \cdot 3 = 40$ Farben auftreten (siehe 7. Feststellung).
Einerseits bilden die 10 Spalten die ganze Tabelle, andererseits ist 40 kleiner als 42. Dies bedeutet, dass 42 keine Lösung sein kann.
Daraus folgt, dass 43 und 44 ebenfalls keine Lösungen sind.

(A) 40% **(B) 18%** **(C)** 20% **(D)** 10% **(E)** 14%