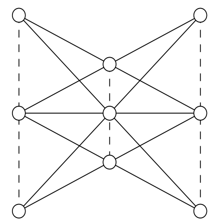
Blick ins Buch“ Bolyai Teamwettbewerb 2019

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

11. Klasse / 11. Schulstufe

7. Die nebenstehende Figur zeigt 9 Äpfel in 10 Reihen (in jeder Reihe befinden sich genau 3 Äpfel). Es ist bekannt:
I. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in neun Reihen gleich.
II. Das Gesamtgewicht der Äpfel ist in genau einer Reihe abweichend.
Man hat eine Waage zum Wiegen der Äpfel.
Die Frage: Durch wie viele Messungen kann man auf jeden Fall entscheiden, welche die Reihe mit dem abweichenden Gesamtgewicht ist?



1. Bemerkung: Die Frage bezieht sich auf die unten aufgeführten Zahlen.
2. Bemerkung: Die Waage liefert stets haargenaue Messergebnisse.
3. Bemerkung: Logisches Denken spielt bei der Lösung eine Schlüsselrolle.

(A) *0* **(B)** *1* **(C)** *3* **(D)** *5* **(E)** *9*

Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **9** eine Lösung ist. Wir messen nach und nach das Gesamtgewicht der Äpfel in den einzelnen Reihen und schreiben die Ergebnisse sowie die dazugehörigen Reihen auf. Wenn eins der 9 Ergebnisse von den anderen abweicht, dann haben wir die gesuchte Reihe gefunden. Wenn jedoch alle 9 Messungen dasselbe Ergebnis liefern, dann ist die nicht gemessene Reihe die Gesuchte.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **0** ebenfalls eine Lösung ist. Es ist kein Tippfehler! Wir werden also beweisen, dass es auch ohne eine einzige Messung möglich ist, die gesuchte Reihe herauszufinden. Im *1. Schritt* betrachten wir *Figur 1*. Hier wurden 6 Reihen markiert: 3 schräge Reihen mit fett gezeichneten Linien und 3 Senkrechte mit gestrichelten Linien. Die Gesamtmassen der Äpfel in den drei schrägen Reihen seien m_1, m_2 und m_3. Die Gesamtmassen der Äpfel in den drei senkrechten Reihen seien s_1, s_2 und s_3.
<u>1. Feststellung</u>: Die drei fett gezeichneten Reihen erfassen alle 9 Äpfel.
<u>2. Feststellung</u>: Die drei gestrichelt gezeichneten Reihen erfassen ebenfalls alle 9 Äpfel.
Aus der 1. und 2. Feststellung folgt:
<u>3. Feststellung</u>: $m_1 + m_2 + m_3 = s_1 + s_2 + s_3$ (*)
Aus der 3. Feststellung folgt:
<u>4. Feststellung</u>: Die gesuchte Reihe kann nicht eine der fett oder gestrichelt gezeichneten Reihen aus *Figur 1* sein. Begründung: Wenn die gesuchte Reihe

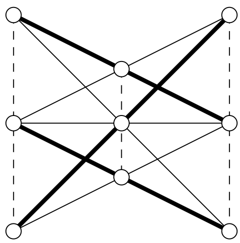
eine dieser 6 Reihen wäre, dann wäre das Gesamtgewicht in dieser Reihe abweichend von den anderen Gesamtgewichten und die Gleichung (*) würde nicht aufgehen.
Im *2. Schritt* betrachten wir *Figur 2*. Hier wurden ebenfalls 3 schräge Reihen mit fett gezeichneten Linien und 3 Senkrechte mit gestrichelten Linien markiert. Die Gesamtmassen der Äpfel in den drei schrägen Reihen seien m_4, m_5 und m_6. Wie im 1. Schritt lässt sich zeigen:

5. Feststellung: $m_4 + m_5 + m_6 = s_1 + s_2 + s_3$ (**)

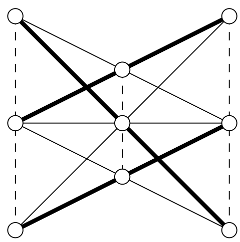
6. Feststellung: Die gesuchte Reihe kann nicht eine der fett oder gestrichelt gezeichneten Reihen aus *Figur 2* sein.
Aus dem bisherigen Gedankengang folgt:

7. Feststellung: Die neun Gesamtmassen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, s_1, s_2, s_3 stehen für neun verschiedene Reihen.

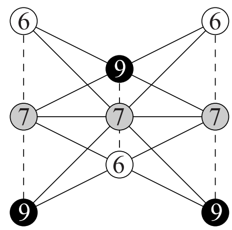
Aus der 4., 6. und 7. Feststellung folgt: Die *gesuchte Reihe* muss die mittlere *waagerechte Reihe* sein – die einzige der 10 Reihen, die bis jetzt nicht vorkam.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Im *3. Schritt* geben wir ein Zahlenbeispiel an (siehe *Figur 3*). Neun der Reihen haben das Gesamtgewicht 22 (6 + 7 + 9), die waagerechte Reihe hat das Gesamtgewicht 21 (9 steht z. B. für 9 Gewichtseinheiten zu je 20 g, also 180 g).
In **Teil 3** begründen wir, dass **1**, **3** und **5** ebenfalls Lösungen sind. Denn: Durch logisches Denken erfuhren wir bereits, welche die gesuchte Reihe ist (siehe Teil 2). Trotzdem können wir Messungen durchführen, ohne dass diese wirklich nötig wären. Bei 3 oder 5 Messungen könnten wir die waagerechte Reihe mit einbeziehen und zur Kontrolle feststellen, dass deren Gesamtgewicht von den anderen Gesamtgewichten abweicht.

(A) 10% **(B) 6%** **(C) 28%** **(D) 25%** **(E) 47%**

8. Das Dreieck *ABC* ist weder gleichschenklig noch gleichseitig. Die Senkrechte von *A* auf die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei *C* schneidet *CB* (oder deren Verlängerung) in *M*. Die Senkrechte von *B* auf die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei *C* schneidet *CA* (oder deren Verlängerung) in *N*. Ferner ist bekannt: $\overline{CN} = 8$ cm und $\overline{BM} = 1$ cm.

Die Frage: Wie viele cm lang kann die Seite *CA* sein?

(A) *7* **(B)** *8* **(C)** *9* **(D)** *10* **(E)** *11*

Lösung: Wir unterscheiden zwei Fälle: $\overline{CA} < \overline{CB}$ oder $\overline{CA} > \overline{CB}$.

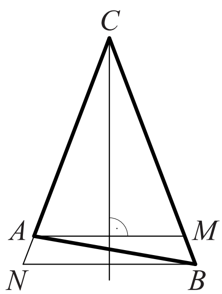
Beachte: $\overline{CA} = \overline{CB}$ geht nicht, da das Dreieck nicht gleichschenklig ist.

1. Fall: $\overline{CA} < \overline{CB}$ (siehe *Figur 1*). Aus der Konstruktion folgt, dass die Dreiecke $\Delta\, CNB$ und $\Delta\, CAM$ gleichschenklig sind.

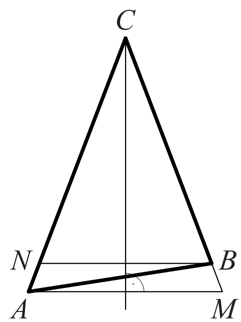
$\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{CB} - \overline{BM} = \overline{CN} - \overline{BM} = 8 - 1 = \mathbf{7}$ (cm) .

2. Fall: $\overline{CA} > \overline{CB}$ (siehe *Figur 2*). Aus der Konstruktion folgt, dass die Dreiecke $\Delta\, CNB$ und $\Delta\, CAM$ gleichschenklig sind.

$\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{CB} + \overline{BM} = \overline{CN} + \overline{BM} = 8 + 1 = \mathbf{9}$ (cm) .



Figur 1



Figur 2

(A) 32% **(B)** 14% **(C) 38%** **(D)** 16% **(E)** 12%