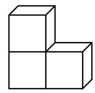
„Blick ins Buch“
Bolyai Teamwettbewerb 2019

Die Prozentsätze geben an, welcher Anteil der Teilnehmer die einzelnen Lösungen angekreuzt hat. Die richtigen Antworten sind fett gedruckt und durch eine Schraffierung hervorgehoben.

8. Klasse / 8. Schulstufe

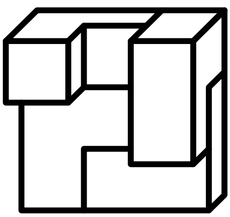
4. Aus drei gleichen 1×1×1 Würfeln ist die nebenstehende L-Form entstanden. Daniel versucht, aus solchen L-Formen einen größeren Würfel zu basteln. Welche der unten aufgeführten Würfel kann er basteln?



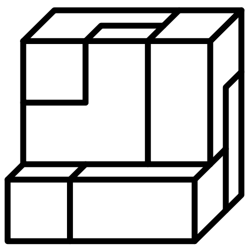
1. Bemerkung: Daniel hat beliebig viele L-Formen.
2. Bemerkung: Die entstandenen Würfel dürfen keine Hohlräume haben.

(A) *2×2×2* **(B)** *3×3×3* **(C)** *4×4×4* **(D)** *6×6×6* **(E)** *8×8×8*

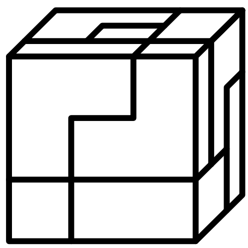
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **(B)** eine Lösung ist. Daniel fängt mit dem Basteln hinten an und kommt dann nach und nach vorwärts. *Figur 1* zeigt den ersten Teilkörper, *Figur 2* dessen Ergänzung und *Figur 3* einen fertigen 3×3×3 Würfel.
In **Teil 2** zeigen wir, dass **(D)** eine Lösung ist. Im *1. Schritt* bastelt Daniel 8 solche 3×3×3 Würfel wie in Teil 1. Im *2. Schritt* bastelt er einen 6×6×6 Würfel mit Hilfe dieser 8 Würfel. Genauer: Jede Kante des neuen Würfels erstreckt sich über zwei 3×3×3 Würfel.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

In **Teil 3** zeigen wir, dass (A), (C) und (E) keine Lösungen sind.
Feststellung: Die Gesamtzahl der kleinen Würfel in einem gebastelten Würfel muss durch 3 teilbar sein. Dies liegt daran, dass eine L-Form aus 3 kleinen Würfeln besteht.
$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist aber nicht durch 3 teilbar. Daher ist (A) laut Feststellung keine Lösung. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ist ebenfalls nicht durch 3 teilbar. Daher ist (C) ebenso

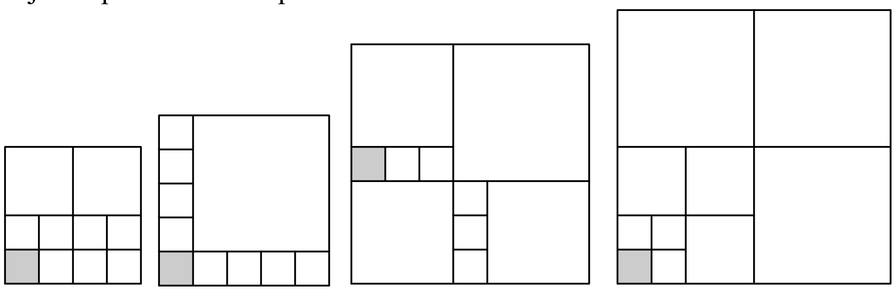
keine Lösung. Schließlich ist auch 8·8·8 = 512 nicht durch 3 teilbar. Somit stellt auch (E) keine Lösung dar.

(A) 8% **(B) 35%** **(C)** 22% **(D) 67%** **(E)** 19%

12. Peter hat ein Quadrat durch gerade Schnitte in 10 kleinere Quadrate zerlegt. Die Seitenlängen aller entstandenen Quadrate sind ganze Zahlen (in cm). In der Zerlegung beträgt die kleinste Seitenlänge eines Quadrates 1 cm.
Die Frage: Wie viele cm lang kann die Seite des Ausgangsquadrats gewesen sein?
Bemerkung: Bei der Zerlegung sind außer Quadrate keine anderen Figuren entstanden.

(A) *4* **(B)** *5* **(C)** *6* **(D)** *7* **(E)** *8*

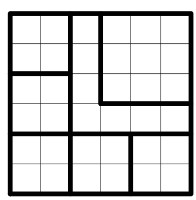
Lösung: In **Teil 1** zeigen wir, dass **4**, **5**, **7** und **8** Lösungen sind. Dazu geben wir je ein passendes Beispiel an:



4 cm 5 cm 7 cm 8 cm

In **Teil 2** zeigen wir, dass 6 keine Lösung darstellt. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm hat den Flächeninhalt 36 cm^2. Die Zerlegung in genau 10 kleinere Quadrate würde bedeuten, dass 36 als Summe von 10 Quadratzahlen dargestellt wird. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm hat den Flächeninhalt 1 cm^2, ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 cm den Flächeninhalt 4 cm^2 ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm den Flächeninhalt 9 cm^2 usw. Es lässt sich zeigen:
$36 = 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 9$ (*)
ist die einzige Rechnung mit 10 Summanden, die aufgeht.

Die Gleichung (*) kann aber durch keine Zerlegung erreicht werden. Begründung: Wenn wir in das 6 cm × 6 cm Quadrat ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 9 cm^2 (3 × 3) einzeichnen, kann in der Zerlegung ein 4 cm^2 Quadrat (2 × 2) höchstens 5 mal und nicht 6 mal vorkommen. Dies zeigt die *Figur*.



Figur

Anregung: Der geneigte Leser möge weitere Beispiele prüfen.

(A) 40% **(B) 33%** **(C)** 16% **(D) 20%** **(E) 31%**